天下文化
科學文化

觀念數學 2

中學代數解題策略

ALGEBRA

北一女數理資優班數學老師
北市教育局高中數學輔導團成員 任維勇 著

前言

自 2009 年出版了《觀念數學 1——如何學好中學數學》，得到了廣大的迴響，很多老師推薦學生閱讀，因為書中精確的指出了學生學習的問題與解決的方向，讓學生從書中得到了啟發，用更正確的方式學習，從而找到了更輕鬆、也學得更好的方法。

可是也有學生雖然發現自己學習有問題，卻很難真正改變自己的學習方法。因為在沒有其他幫助下，很難全面翻新自己已經習慣多年的學習方式。其中最困難的，是建立解題策略與運用自己的思考去解題，而這兩者是息息相關的。先熟悉基本定義、公式，也做過了基本題與標準題，許多同學都做得到，可是如何建立自己的解題策略？又如何運用思考來解題？

本書就是以此為目的，一方面介紹簡單的解題策略，另一方面引導學生以標準的思考去解題。本書大量採用學測與指考的試題，讓學生體驗出，只用簡單的解題策略與思考，就足以應付大考的題目了，讓學生由此開始，能去解出那些沒見過的題目，真正享受解決問題的樂趣。

學生的困難

很多學生總覺得課本太簡單，可是真的考到課本上的基本概念，又未必答得出來。一方面無法深入去讀通課本，同時擔心課本太簡單，結果又四處學了很多一知半解的東西。最後反而貪多嚼不爛，感覺好像學了很多，卻又學得支離破碎，遇到問題完全使不上力，久了以後就對數學失去信心，不知如何應付。不少同學覺得數學科投資報酬率很低，其實

就是這種努力後卻覺得無力。

常有學生或家長問我：「每天要做多少題數學才夠？」、「每天要做數學多久才夠？」或是「如果做完數學課本與講義，那麼可以得到多少分？」這樣的問題我答不出來，我聽到的只是對數學的誤解。如果一個籃球選手問林書豪：「每天要練球多久，才能進到 NBA 打籃球？」我猜林書豪也沒有確切的答案。

學數學也一樣，問題不是做多少題，而是思考了多少。傳統思維告訴我們：「只要功夫下得深，鐵杵磨成繡花針。」我相信理論上做得到，但我寧願把鐵杵賣了，得到的錢應該夠買一包繡花針。方法對了，就會事半功倍。

要細說錯誤的學習方式，可以閱讀我的前一本書；如果要簡單的說，一是學習不夠深入，二是沒有思考。無論是上課或自我練習，都要常常問自己，我思考了多久？狂做題目而沒有思考，只是走馬看花，沒有實質收穫。如果學習數學只是一題一題做，沒有統整的思考過程，當然得到的能力都是支離破碎而無法運用的。

什麼是解題策略？

做過一些相關連的題目後，就該想一想，它們的解法有沒有共通處？有沒有不同處？能不能找到一些通則？找到了就變成一個解題策略。運用這個策略再去解更多的題目，有時很有效，這就是個好的策略；有時無效，我們就發現這策略的缺陷或限制，也許再修改一點，就能使策略解決更多的問題。這時候我們學過的東西就組織起來了，不再是零碎而易混淆。一個策略可以解出一群問題，這樣學習就更有效率了，即使對題目的印象模糊了，依然可以用策略解題解出。經過思考的策略自有因果關係，不會忘記。小的策略又可能整合成更大、更有效的大策略，運用成熟的策略，就能去解決那些從沒見過的題目了。

比較一下，心中缺乏「解題策略」的狀況：公式、定理都會，一般的題目也會，可是沒見過的題目就不會做，或根本不知從何想起。可是看完解答後，才發現原來可以這樣做，又發現需要用的方法、公式自己都會，可是就是無法組織起來，好像空有一堆「知識」，卻不能組織成為「解題能力」。

什麼是引導思考解題？

我將題目分類成基本題、標準題、思考題，中等程度學生很快就能熟練基本題，然後學會標準題，接著就會面對思考題了。思考題是那些將標準題再變化、整合，或是根本沒見過的題目。也有學生覺得，我沒見過的題目我當然不會，真的嗎？我們學「解題」，是學會解決問題，不是「記下特定方式去解特定問題」。

題目包括三樣東西：已知、求解、範圍，我們必須分析題目，自己找出解題的方向並執行，有時還需嘗試錯誤再修正，得到答案再檢核答案，這完整的過程就是思考解題。就像在一個未知的世界摸索，也有很多不同的方式與規則，成功時更會有許多成就感。

本書的內容

本書共分七章。

第一章談代數解題策略，主要在整合並推廣在國中學過的數學，逐步建立一個重要的解題策略。

第二章到第六章大致配合高中第一冊與第二冊第一章的內容，深化課本內容，也建立一些小策略，並引導學習思考解題。

第七章談根據給定的定義解題，會提出一套完整的解題策略，讓讀者運用數學知識，

去解決那些沒見過的題目。

題目多採用近年學測、指考題，也希望讀者體會：只要用課本知識，配合解題策略，就能輕鬆解出這些題目了。每個題目的詳解前附有「思考」，引導讀者配合題目循序思考，找出解題方向。詳解後附有「說明」，做一些補充或引導讀者對解題過程做一點回顧，希望能再深化學習。

大考中心自 2002 年起，都會公布正式大考選擇題與選填題的答對率，題後也附上供讀者參考，可藉此了解各題的難易程度。有時也會看到不難的題目，但答對率很低，這種題目多是當年的全新題目，已變成現在的標準題了。

如何使用本書？

如果讀者是高一的學生，請先學第一章，當做銜接國中與高中的跳板，並建立簡單的思考解題策略。然後配合學校的進度，先學會課本內容，再利用本書相應的章節，熟悉並應用各個解題策略，也由實例中琢磨自己運用解題策略與思考的能力，然後就可以到處找各種難題來自我挑戰，享受解題的樂趣。

如果讀者是要準備學測、指考的高三學生，也請先學第一章，然後依章節先看完課本一次，並注意課本中的每一個細節，隨後用本書做統整學習，也練習用自己的思考去解題。不要怕題目沒見過，解出沒見過的題目才是真正的解題。一旦解題策略熟悉後，也可以重新看那些標準題，可能會發現，有了合適的解題策略後，那些標準題會變成很自然就解出的問題了。

不論是哪一種學生，在讀到實例時，先看清題目，然後先試著自己解，解不出時，先看題目後的「引導思考」，一條一條看，也許看幾條並想過後就會解了，當看完引導思考後，可以重新再想一次，盡量能由自己解出來。最後會做或看了詳解後，再做一次回顧，

也看一遍題後的說明，讓想法深入心中。只要用上述方式學習，漸漸就會感覺到深入學習的效果，雖然學一題的時間多很多，但學一題就有一題的效用，而且有累積的效果。

如果讀者是數學老師，閱讀本書是想增加更多不同的想法與比較。若您能認同我的觀念，懇請大家在講解思考題時，能在正式解題前，先引導學生看清題目，並用一些問題引導學生思考後，再帶著學生解題目。也許這樣會多花點時間，可是「教學生會思考」比「多教幾題」更重要吧。

再一些叮嚀

不管有多少策略，總要先看清題目，完整看完題目後才開始選擇有效的策略。前面提過，題目包括三樣東西：已知、求解、範圍，看完題目後考慮一下，也許只需要使用定義就可算出，也許是一個常見的標準題，看完就知道該如何做了。如果都不是，我們就必須自己從題目中去找尋做法。

「解題策略」就是在解思考題時我們的方向，尤其對於那些沒見過、有點難的問題，也許看完題目後，我們也不知道或不確定怎樣做一定會有答案，於是我們會「試試看」，這樣變化一下，那樣轉換一下，或者代入某公式看看結果如何？這些「試試看」不應該只是盲目的試運氣，而是找到方向，或至少知道哪些方向較有希望，或者是這樣做會離答案愈來愈近。

沒有完美的解題策略，沒有一個解題策略可以保證解出所有題目。別指望有人提供一個策略，從此就所向無敵。當我們心中有基本的解題策略後，小心呵護它，隨著更多的刺激，它會愈來愈擴大，愈來愈有效。愈大的策略，卻不一定愈複雜，有時還會更簡單，只是運用要更靈活。

有沒有解題策略又好用，又容易學？我提供一個：

一次條件式，可以代入其他部分消去一個文字數。

有沒有解題策略既規則簡單，又適用範圍大？我提供一個：

觀察已知與求解，哪些部分相同？哪些部分不同？將不同化為相似。

能將體會這策略並善用，就已經成為解題高手了。

第一章
代數解題策略

本章分為 8 節：

第1節　代數解題策略：介紹「代數解題策略1」做為起始。

第2節　解方程式：加強解方程式的能力，再引入「代數解題策略2」。

第3節　解方程組：加強解方程組的能力，再引入「代數解題策略3」。

第4節　求值問題：求解也可能是一個代數式之值，並引入「代數解題策略4」。

第5節　代換：巧妙的代換，使題目變簡單了。

第6節　化簡的方向：先要知道什麼是簡單，然後就知道該如何化簡。
同時引入「代數解題策略5」

第7節　比大小的問題：從小學就有的問題，建立更一般性的策略。

第8節　其他解題時需要的觀念：一些解題或考試時有幫助的觀念。

第8節
其他解題時需要的觀念

這一節提到的是九個解題或考試時該有的觀念，不一定是真正的數學，但總是對考試有幫助的，尤其應該要平常就養成習慣。

一、數字太複雜先照抄

這是常遇到的情形，數字的算式變得很複雜，常令我們覺得沮喪或煩躁，甚至想放棄或另起爐灶。其實這時候可以先不要算而只是照著抄，有可能後來有機會直接消掉，也有可能後來發現根本不需要算，當然，也可能最後還是必須算，那麼已經得到答案再專心化簡，至少心情比較篤定，也比較不會煩躁了。

【例】　設 x 為任意實數，則 $(x-49)^2+(x-51)^2-4x$ 的最小值為______。

【解】　（二次式求極值當然用配方，配方前要化成標準式）

$(x-49)^2+(x-51)^2-4x$

$=(x^2-98x+49^2)+(x^2-102x+51^2)-4x$

$=2x^2-204x+49^2+51^2=2(x-51)^2-2\times51^2+49^2+51^2$

最小值為 $-2\times51^2+49^2+51^2=49^2-51^2=(49+51)(49-51)=-200$

在這個例子中，標準程序要算 49^2+51^2，先不算，最後變得根本不用算。這也有另一個方法，配方後將 $x=51$ 代入 $(x-49)^2+(x-51)^2-4x$ 得最小值為 $2^2+0^2-4\times 51=-200$，反正「數字太複雜先照抄」常有意想不到的好處。

二、利用特殊數值代入

有些題目中，變數不是特定值，卻要求一個式子的值，我們會用特定值代入得到答案。

【例】設 $x,\ y>0$ 且 $xy=1$，試求：$\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y}=$ ______。

【解】$\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y}=\dfrac{(1+y)+(1+x)}{(1+x)(1+y)}=\dfrac{x+y+2}{xy+x+y+1}=\dfrac{x+y+2}{1+x+y+1}=1$

這樣的結果是說：任意滿足 $xy=1$ 的正數 $x,\ y$ 都會使得 $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y}=1$。如果做不出來，我們可以先找符合「$x,\ y>0$ 且 $xy=1$」的一組 $x,\ y$，例如以 $x=1$，$y=1$ 代入得 $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y}=\dfrac{1}{1+1}+\dfrac{1}{1+1}=1$，這樣的做法在選擇題或填充題可以賴皮得到分數，但在演算題時，這樣做一定沒有分。

其實這是正規的思考：先用特殊值代入猜答案，有了可能的答案，常常會給我們一些解題的靈感。運用此方式時要記得：1. 用的特殊數值必須滿足題目要求，在上例中，只要滿足 $xy=1$ 的正數都可得到正確答案，當然用 $x=y=0$ 代入就沒用了；2. 要去挑簡單好算的數據，沒人想用 $x=100$，$y=0.01$ 代入。大家可以試試後面兩例，其中第二例屬於三角函數範圍，但可以賴皮得到答案。

【例】　若 $x+y+1=0$，則 $x^3+y^3-3xy=$ ______。

【解 1】$x^3+y^3-3xy=(x+y)^3-3xy(x+y)-3xy=(-1)^3-3xy(-1)-3xy$

$=-1+3xy-3xy=-1$

【解 2】（賴皮解）取 $x=-1$，$y=0$ 滿足 $x+y+1=0$，

代入 $x^3+y^3-3xy=-1$

【例】　設 $\triangle ABC$ 的三邊長分別為 x，y，$\sqrt{x^2+xy+y^2}$，則 $\triangle ABC$ 的最大角為 ______。

【解】　（賴皮解）這裡 $x,\ y$ 為正數就好，

以 $x=y=1$ 代入得三邊長 $1,\ 1,\ \sqrt{3}$，

如右圖，最大邊 $\sqrt{3}$ 的等腰三角形，

做頂角的角平分線會垂直平分底邊，只看右側直角三角形，斜邊 1，一股長 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

則右側底角為 $30°$，頂角也就是最大角 $120°$。

（這題的正規做法不在本書範圍，在三角中是中等難度的題目。）

出題老師在設計題目時，會注意避免學生有機會用此方法得答案，但難免會有漏網之魚。

三、選擇題的排除法

選擇題的特性是只要分辨哪一個是對的，尤其是單選題，只要知道其他是錯的，就表示剩下的是對的。當題目不好算時，將選項的答案代回檢驗也是一個方法。

舉一些特例代入，也可能有效，但也要記得：特例代入不合，就表示該選項錯誤，而特例代入符合，不表示該選項一定對。有時只要能刪去部分不可能的選項，也可以縮小我們注意的焦點。

四、選填題的答案格式

選填題的答案格式有時也是一種提示或代表題目的要求。

例如求方程式的解時，答案格式能提示我們答案是整數、分數或無理數，如果答案是兩格，就表示答案是二位整數或負的一位整數，求近似值的題目中，答案格式告訴我們要求到小數第幾位，有時這些還能給我們一點幫助。

五、解讀表格

有時題目會給表格，表格單純時題目不會解釋，我們必須自己看懂。生活中的表格大家都會看，可是當表格夾雜著數學式時，有的同學會怕，所以這裡我們做一些標準的看法。常見的表格有兩種形式：一維表格與二維表格。

一維表格是說明變數 x 與變數 y 的關係，通常以兩列或兩行來呈現。右邊是兩列的標準格式，第 1 行表明變數是 X 與 Y，其餘行是資料，例如第 3 行就表示：當 $X=c$ 時，$Y=r$。其餘類推，表中共有 5 筆資料。下面這個表格請大家自行解讀其意義。

X	a	b	c	d	e
Y	p	q	r	s	t

r	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
$(1+r)^{100}$	2.705	7.245	19.219	50.505	131.501

二維表格是說明變數 z 由變數 x 與變數 y 所決定，通常就稱做 z 的表。如右圖，左上角是變數 x、y 的名稱，第 1 列是所有 x 之值，第 1 行是所有 y 之值，其餘是相應的 z 值。例如第 3 列與第 4 行交會處是 g，表示當 $x=3$ 且 $y=q$ 時，相應的 $z=g$。看看手邊的功課表、全班成績單，是不是都依這樣的規則設計？

y \ x	1	2	3	4
p	a	b	c	d
q	e	f	g	h
r	i	j	k	l

當然有時為了需求或特性，很多表格會有獨特的設計。至少考題中的表格，都可以簡單依這樣的規則來解讀。

六、回到基本定義

這是一個觀念，尤其在學測中，總有一些題目是出題教授精心設計的新題，大家都沒見過，連類似的題目都沒見過，有時只要用最基本的定義或原理就可以輕易解出來，可是事後都看到答對率很低。我樂見這種題目多一點，更希望學生因而更著重於基本功。

我的一個同事是學養俱佳的超強老師，她有一句名言：「對學生而言，沒見過的題目就是難題。」這是事實，多半學生花很多時間做各式難題，卻很少在最基本的定義與性質上鑽研。

再次強調，「回到基本定義」是面對陌生題目最好的方法，但要在平時就能深入考量最基本的內容，才能有這種能力。

七、面對綜合題

這裡的綜合題是指一個題目牽扯兩個不同章節的題目，例如：機率問題裡面又有指

數、方程式裡的問題又摻雜了等比數列。這時我們就需考慮兩部分的解題策略，哪個好用就先用哪個。例如聯立方程組裡又有根號，聯立方程組要想著消去未知數，根號要想到利用平方消去根號。

【例 1】解方程組：$\begin{cases} x+\sqrt{y+5}=7 \\ 2x-\sqrt{y+5}=5 \end{cases}$

【解】（可簡單消去未知數 y，直接消去 y）

兩式相加得 $3x=12 \Rightarrow x=4$

代入 $x+\sqrt{y+5}=7 \quad \Rightarrow 4+\sqrt{y+5}=7 \quad \Rightarrow \sqrt{y+5}=3$

$\Rightarrow y+5=9 \Rightarrow y=4$

故得 $x=4$，$y=4$

【例 2】解方程組：$\begin{cases} x+\sqrt{y}=5 & \cdots\cdots(1) \\ 2x^2-3y=6 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

【解】（無法簡單消去未知數，先消去根號）

由 (1) 式得 $\sqrt{y}=5-x \quad \Rightarrow y=(5-x)^2$

代入 (2) 式得：$2x^2-3(5-x)^2=6 \Rightarrow x^2-30x+81=0$

$\Rightarrow (x-3)(x-27)=0 \Rightarrow x=3$ 或 27

當 $x=3$ 代入 (1) 式得 $3+\sqrt{y}=5 \quad \Rightarrow \sqrt{y}=2 \quad \Rightarrow y=4$

當 $x=27$ 代入 (1) 式得 $27+\sqrt{y}=5$，不合

故 $x=3$，$y=4$

通常綜合題用到的都是基本想法，如果出題老師是將兩章艱難的部分再組成一題來考，就太殘酷了。

八、檢核答案

做出的答案到底對不對？大多數同學都會想翻到書後面看答案，這當然是最簡單的方法。但如果是考試呢？會變成考卷發下來就知道了，知道的時候分數都已經被扣掉了。我們都希望能在交考卷以前就發現自己的錯吧，有什麼辦法可以如此有先見之明呢？

重算是一個方法，但耗時且效果差，也常會重複錯誤而已。很多題目或其中一個過程可以簡單的驗算，例如解方程式有點麻煩，但代回去檢查很簡單。解聯立方程組時，常得到 x 以後，代回 (1) 式得到 y，順手再代入 (2) 式驗算吧。做連加法時，從頭加到尾，再從尾加到頭一次，以確定答案。

求級數和 $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)=$ ？

這樣做：$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)$

$$=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{2n+1}{3}+1\right]=\frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{2n+4}{3}\right]=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

怎樣驗算？將 $n=2$ 代入 $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}=\frac{2\times3\times4}{3}=8$，確實等於 $1\times2+2\times3$。

什麼樣的計算有好方法驗算？平時多注意就會發現很多。

九、培養耐力

每個人解題的耐力都有限度，超過限度就會覺得煩躁，想要放棄。有的學生只能忍受三個轉折，那麼超過三個轉折的題目就做不出來了。有時候熟悉的學生問我問題，但我覺得她應該能自己解卻放棄了，我就請她再讀一遍題目，常常她讀到一半，突然就很高興的說：「啊！我會了！」她不是解不出來，而是題目轉折超過她的限度，就受不了而放棄。經過我再逼她集中精神、再推她一下，就解出來了。

我自己算高中數學題時，耐力限度大約一小時，若超過限度還沒解出，我也會想去看解答。有些數學家對於有興趣的問題，可以花幾個月甚至幾年時間去解，這與信心和毅力有關。這些都可以經由努力和經驗慢慢加強：同樣的能力，耐力愈強就能解愈多的題目。