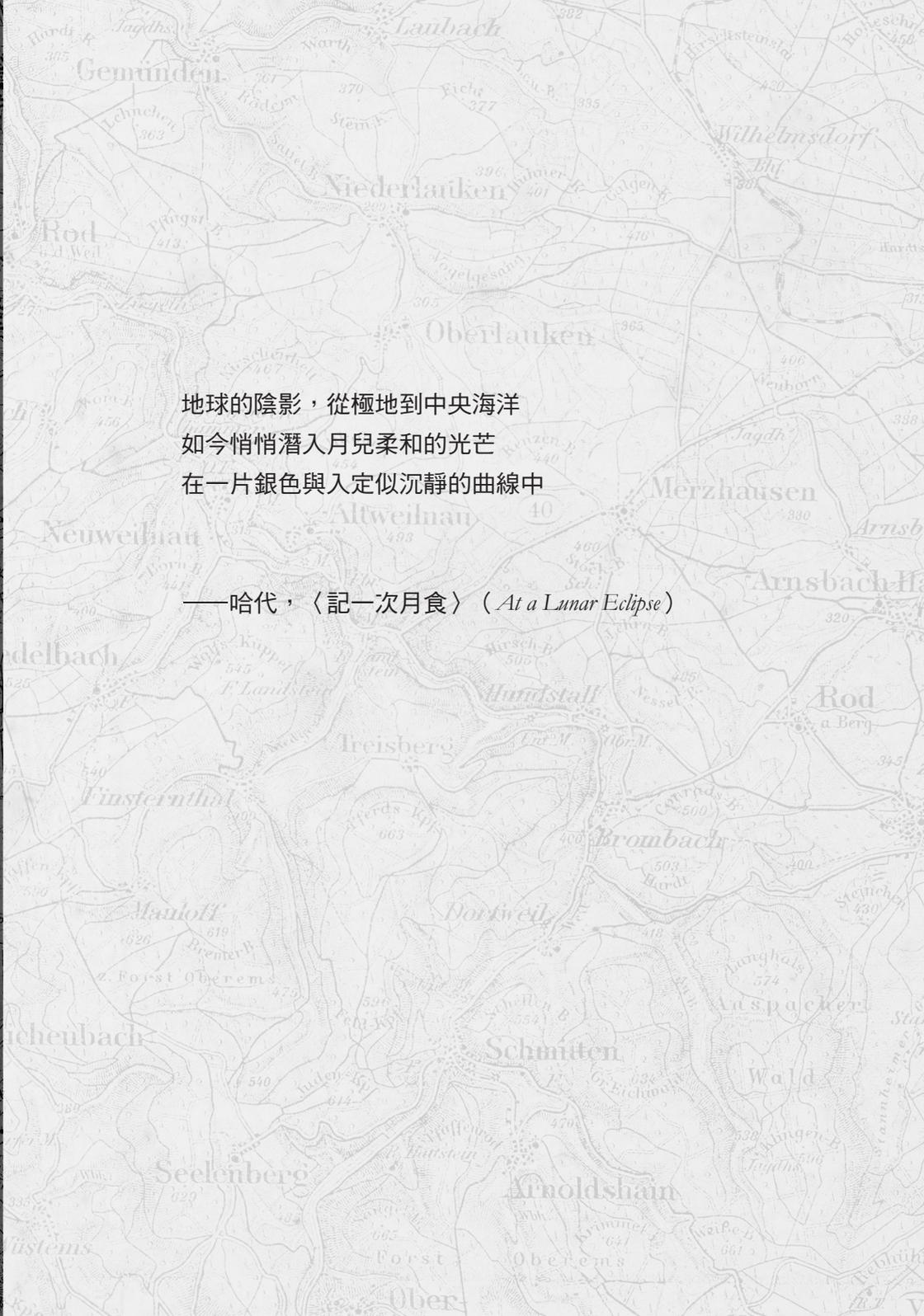


| 第一章

知其不可測而測之

——從希臘到花刺子模





地球的陰影，從極地到中央海洋
如今悄悄潛入月兒柔和的光芒
在一片銀色與入定似沉靜的曲線中

——哈代，〈記一次月食〉（*At a Lunar Eclipse*）

二千多年以前，古希臘的哲學家兼科學家展開一項令人望而生畏的計畫，困難度有如今日探索太陽系的邊界，那就是測定整個地表的大小與形狀。對古希臘人而言，地表簡直大得不可思議。不論是希臘人自己，或是他們接觸過的任何文明，活動範圍都只是大地的一小部分。

想要根據能直接測量的微小範圍，揣度人類前所未至、甚至從未夢想過的浩瀚陸地，一定需要極高明、極巧妙的方法。除此之外，還需要系統化地發展一門嶄新的學問，古希臘人稱之為 geometry（幾何學），這個字的希臘文原意就是「測地」。

誰最早提出「畢氏定理」？

在幾何學的早期發展史中，最有名的人物之一是公元前六世紀的畢達哥拉斯（Pythagoras）。但是早在畢達哥拉斯之前多年，埃及人已經發明一種簡單的方法，來畫出相互垂直的線條，比方說金字塔的底邊。

他們在繩索上打出等距離的結，將繩索分成3：4：5的三段長度。然後根據這三段長度，在地上釘三根樁釘，將繩索圍在周圍再拉緊，便形成一個邊長3：4：5的三角形。他們發現邊長3與4的兩邊形成一個直角，也就是90度。此外他們還發現，有些不同比例的邊長也能構成具有直角的三角形，只要三邊的長度符合一個特殊條件。

想要得到一個直角三角形，關鍵在於最長邊的平方要等於另外兩邊平方的和，這就是我們熟知的「畢氏定理」。

巴比倫人同樣知曉這個關係。事實上，早在畢達哥拉斯之前一千多年，制定法典的漢摩拉比在位之時，巴比倫人已發展出超越埃及人許多的數學，除幾何學外，還有更高明的數字表示法，以及一些基本代數。他們不但應該已知道「畢氏定理」，甚至還列出一長串代表直角三角形的三邊比例，包括諸如「65, 72, 97」、「119, 120, 169」這些難以置信的組合。

那麼，這個定理為何冠上後起之秀畢達哥拉斯的大名？這是因為，雖然埃及人與巴比倫人發現在先，他們似乎未曾想到該如何證明這個事實。畢達哥拉斯的大名會與這個定理連在一起，係因為據說他是最早提出證明的人。其實，並沒有直接證據可以證實這件事。（我們不知道畢達哥拉斯是否留下任何手稿，即使有的話，也沒有任何斷簡殘篇留存至今。）最可能的情況，是「畢氏定理」的第一個證明出自他的門徒，也就是「畢達哥拉斯學派」的學者，而這是畢氏之後一個世紀的事了。

歐氏登場，名垂千古

歐幾里得（Euclid）生於畢達哥拉斯之後二百多年，後來成為古希臘數學家中最有名的一位。在畢達哥拉斯與歐幾里得兩人的年代之間，幾何學沿著兩條平行線發展，其中一支專注於特殊圖形的研究，例如三角形、矩形，以及由數個圓弧圍成的形狀；另外一支則致力發展證明的方法與演繹推論的過程，導致一些單靠直接觀察無法獲得的新發現。歐幾里得出場的時候，幾何學的知識已經累積到某個程度。

歐幾里得的生平隱藏在歷史迷霧中，甚至比畢達哥拉斯更為模糊。我們能夠肯定的幾乎就只有：他於公元前300年前後，曾在亞歷山大城居住與工作。然而，他與畢達哥拉斯最大的不同，是他的著作不但流傳至今，而且成了大多數現代科學的基礎，以及所有數學的模範。

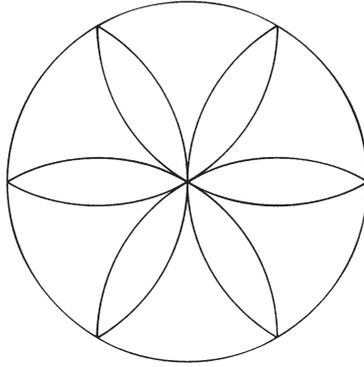
使歐幾里得名垂千古的不朽著作，通稱為《原本》或《幾何原本》（*The Elements*）。這是一套十三冊的數學輯要，其中有五冊討論二維圖形的幾何學，三冊討論三維幾何學，其他各冊的內容則是別的數學問題。

歐幾里得的《原本》對西方世界造成深刻的衝擊。這套書最初被視為數學及其他科學研究的工具與模範，後來漸漸演變成標準教育的基本環節——一個智識的工具，每位年輕學子都得與它奮戰一段時期，然後融會貫通、據為己有。

《原本》的魅力至少有下列四個不同的層面：

一、它給人一種確定感：在一個充滿非理性信仰與無常臆測的世界裡，《原本》中的敘述都是經過證明的真理，沒有一絲值得懷疑的地方。雖然歐幾里得所用的假設與推論，都有一些被質疑了好多世紀，令人驚訝的是經過二千多年，從未有人在《原本》中找到真正的「錯誤」。在此所謂的錯誤，指的是並非由給定的假設以邏輯推斷出的敘述。

二、它的方法具有強大的威力：從少數幾個明顯的假設出發，歐幾里得便導出一連串令人眼花撩亂的結果。



幾何圖形

三、證明方法所展現的高妙才智：精采的偵探小說之所以吸引人，仰賴的可說是同樣的才智。

四、幾何圖形的美感：《原本》前幾冊的推論對象是幾何圖形，它們本身就具有一種美的吸引力，這種美感與加諸其上的推論並沒有什麼關聯。

由於《原本》具有這些特色，導致米萊女士在她的詩作中讚嘆道：「唯歐幾里得，得見赤裸的美神。」

圓的魅力無人可擋

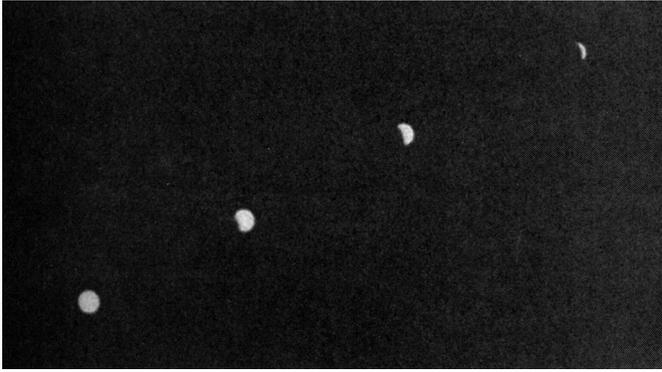
在數學家研究的所有圖形當中，圓形具有一種獨特的魅力。如同歐氏幾何在科學上的地位，在後人描述世界與宇宙的各種嘗試中，圓形注定扮演一個強而有力、功過參半的角色。

圓形的概念當初是如何進入人類思維的？在自然界中，人類見到真正圓形的場合少之又少。其中最為顯著的例子，無疑是每天出現的太陽——雖然陽光太強，令人無法逼視，只有在接近地平線或被薄雲輕霧遮掩時例外。就某些方面而言，滿月其實更令人敬畏。月球以二十八天為週期，從新月逐漸豐盈成一個完美的圓形。另一個間接的例子則由觀星者所發現，那就是每晚星辰的軌跡，它們都循著圓弧跨越天空，這點在北極星附近的星辰尤為明顯。

而在地球上，無波水池中落下的最初幾滴雨，或是投入平靜水塘中的一塊鵝卵石，都會形成一組美麗的圓形漣漪。來到大海邊，或是航海時站在船尾眺望，則能見到地平線本身便是個巨大的圓弧。

或許地平線呈現的圓弧，就是地表形狀的第一個線索。然而有關地表的形狀，第一個堅實的證據並非來自對地表本身的觀察，而是古人仰觀天象的兩個結果。雖然我們現在無法肯定，古代觀星者何時領悟到他們的觀察所蘊涵的意義，但公元前四世紀的亞里斯多德（Aristotle），在他的著作中已經提到兩者。

第一個觀察結果源自月食。月食的成因是太陽、地球與月球在太空中排成一直線，地球暫時將太陽射到月球的光線遮住。在



月食的四個階段，始於一個接近完美圓形的滿月。當地球的影子逐漸掠過月球表面時，月球被「吃掉」的部分愈來愈多，可見的弧形部分就愈來愈少。

月食的過程中，地球的陰影逐漸掠過月球表面，而這個陰影顯然是個圓形。

第二個證據較為迂迴曲折，不過更具說服力，它植基於從許多緯度不同的地點觀測天空的結果。古人很早就知道，如果一直朝南走，熟悉的北方天空星座會漸漸下沉，而南方天空的星座則會上升。除此之外，還會有些在高緯度地區見不到的新星座，會逐漸出現在地平線附近。一個人向南走得愈遠，這些新的星座就升得愈高，而他見到的新星座也就愈多。

終於有一天，人們恍然大悟：如果地表是球形，這種變化就是理所當然的事。所以說，早在二千多年前，平坦地表的想法就和觀察事實不符合，因此不得不揚棄。