第二章
二次函數

二次函數是函數中較簡單的，也因為簡單，所以學習得很深入，題目也可以做出很多廣泛的變化，同時也會在其他單元中不斷的運用，是一個必須研究透澈的單元。

本章共有 2 節：

第1節　函數與一次函數：要了解函數的意義與基本用法。這些會廣泛在各函數問題上使用。

第2節　二次函數：包含圖形、方程式、不等式與極值。

第 1 節 函數與一次函數

重點整理

一、函數

1. 定義 1：x, y 為兩個變數，若 y 值隨 x 值而唯一確定，則變數 y 是變數 x 的一個函數。其中 x 為自變數，y 為應變數。
2. 定義 2：函數 f 是一個對應關係，將 x 對應到 $f(x)$，也記為 $y = f(x)$。
3. 說明：

 (1) 函數 $y = x^2$，x, y 為有關係的變數，可任意變動而不是定數。

 當 $x = 3$，y 隨 x 而確定為 $3^2 = 9$；

 當 $x = 5$，y 隨 x 而確定為 $5^2 = 25$。

 我們在意的是 x, y 的關係或當 x 變動時，y 會如何相應變動。

 (2) 函數 $f(x) = 3x + 2$，f 是一個對應關係：x 對應到 $3x + 2$。

 5 對應到 $3 \times 5 + 2 = 17$，也就是 $f(5) = 17$，

 也可說 f 是一個「特殊運算」，此處 f 就是「乘以 3 再加 2」。

 $f(x) = 3x + 2$ 就是「將 x 乘以 3 再加 2」，

 $f(a-1) = 3(a-1) + 2$ 就是「將 $a-1$ 乘以 3 再加 2」。

 (3)「唯一確定」是函數的基本要求，若「1 對應 3 且 1 對應 4」，則會有「$f(1) = 3$ 且 $f(1) = 4 \Rightarrow 3 = 4$」的矛盾。

二、函數圖形

1. $y = f(x)$ 的圖形是坐標平面上，所有點 $(x, f(x))$ 所成的圖形。
2. 函數圖形與任意鉛直線最多只有 1 個交點。

三、線型函數：函數圖形為一直線的函數

1. 線型函數是 $f(x) = ax + b$，包括一次函數與常數函數。
2. 一次函數是 $f(x) = ax + b$，其中 $a \neq 0$，常數函數是 $f(x) = a$
3. 線型函數 $f(x) = ax + b$ 的性質：

 (1) 當 $a > 0$，圖形為左下右上的直線。

 (2) 當 $a < 0$，圖形為左上右下的直線。

 (3) 當 $a = 0$，圖形為水平的直線。

 (4) 若 $f(x) = ax + b$ 通過兩點 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)，則 $a = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$。

 (5) a 是直線的斜率，當 y 隨 x 而變化時，y 變化量是 x 變化量的 a 倍。a 的正負表示傾斜的方向，當 $|a|$ 愈大時，直線愈斜。

充要條件：點與函數圖形的關係

(1) 點 (a, b) 在 $y=f(x)$ 圖形上 $\Leftrightarrow$ $b=f(a)$ $\Leftrightarrow$ 若 $x=a$，則 $y=b$

(2) 點 (a, b) 在 $y=f(x)$ 圖形上方 $\Leftrightarrow$ $b>f(a)$

(3) 點 (a, b) 在 $y=f(x)$ 圖形下方 $\Leftrightarrow$ $b<f(a)$

說明：

❶ 有關函數圖形的問題裡，一定要主動想到這些關係。

❷ 在幾何問題裡也類似：點在圖形上 $\Leftrightarrow$ 點代入方程式會滿足。

❸「在圖形上」與「在圖形上方」意思完全不同，看題目時要小心。

充要條件：兩函數圖形的關係

(1) $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 圖形交點的 x 坐標恰為方程式 $f(x)=g(x)$ 的實根。

(2) $y=f(x)$ 的圖形完全在 $y=g(x)$ 的上方 $\Leftrightarrow$ $f(x)>g(x)$ 恆成立

說明：

❶ 請由函數圖形上觀察這些充要條件的原理。

❷ 若 x 有範圍，也可有相應的充要條件。

例如：在 y 軸右側部分，$y=f(x)$ 的圖形完全在 $y=g(x)$ 的上方。

$\Leftrightarrow$ 當 $x>0$ 時，$f(x)>g(x)$ 恆成立

第 2 節 二次函數

重點整理

一、複數

1. 虛數單位 i：$i=\sqrt{-1}$ 為虛數單位。

(1) $i^2=-1$。

(2) 當 $a>0$ 時，規定 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$。

2. 複數的定義：設 a, b 為實數，形如 $a+bi$ 的數為複數。

複數 $z=a+bi$ 的實部為 a，虛部為 b。

3. 複數的相等：設 a, b, c, d 為實數，則 $a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c$ 且 $b=d$

4. 共軛複數：設 a, b 為實數，複數 $z=a+bi$ 的共軛複數為 $\bar{z}=a-bi$

(1) $z+\bar{z}=2a$，$z\times\bar{z}=a^2+b^2$ 都是實數。

(2) z, w 為複數，則 $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$，$\overline{z\times w}=\bar{z}\times\bar{w}$。

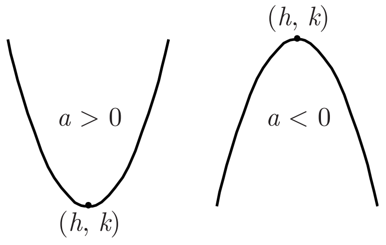
5. 設 a, b 為實數，$\sqrt{a}\sqrt{b}=\begin{cases}-\sqrt{ab}\text{；當 } a,b<0\\ \sqrt{ab}\text{；其他情形}\end{cases}$；$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}\text{；當 } a>0, b<0\\ \sqrt{\dfrac{a}{b}}\text{；其他情形}\end{cases}$

二、二次方程式

1. 公式解：二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的解為 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。
2. 根的性質：實係數二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的判別式 $D=b^2-4ac$。
   (1) 兩根為相異實數 $\Leftrightarrow$ $D>0$
   (2) 兩根為相等實數 $\Leftrightarrow$ $D=0$
   (3) 共軛虛數 $\Leftrightarrow$ $D<0$
   (4) 使用此性質時要檢查「實係數」條件。
3. 以根造方程式：以 $\alpha,\ \beta$ 為兩根的二次方程式為
   $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ $\Leftrightarrow$ $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$
4. 根與係數關係：$ax^2+bx+c=0$ 的解為 $\alpha,\ \beta$，則 $\begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}\\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}\end{cases}$

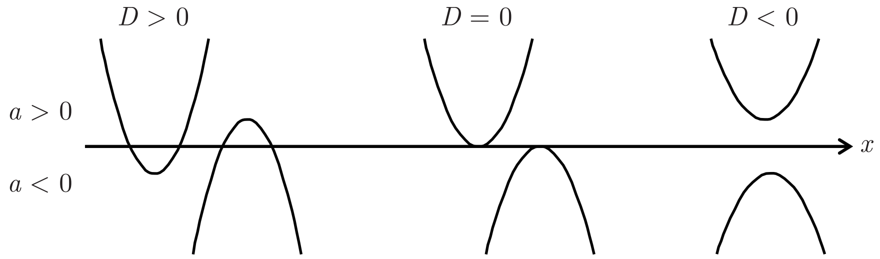
三、二次函數的圖形

1. 圖形為拋物線。
2. 頂點與開口方向：



   $a\neq 0$，$y=a(x-h)^2+k$ 的頂點 $(h,\ k)$
   當 $a>0$ 時，開口向上。
   當 $a<0$ 時，開口向下。
   $|\,a\,|$ 愈大，則開口愈窄。
   圖形對稱於 $x=h$，即通過頂點的鉛直線。

3. $y=ax^2+bx+c$ 與 x 軸關係（其中 $a\neq 0$，$D=b^2-4ac$）：
   $D>0$，交於兩點；$D=0$，切於一點；$D<0$，無交點。
   由 a 與 D 可判斷二次函數與 x 軸的六種關係。



4. $y=ax^2+bx+c$ 與 y 軸恰有一交點 $(0,\ c)$。

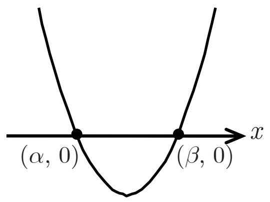
四、二次函數的極值：$a\neq 0$，$y=a(x-h)^2+k$

1. x 為任意實數時，
   (1) 若 $a>0$，當 $x=h$ 時，y 有最小值 k，沒有最大值。
   (2) 若 $a<0$，當 $x=h$ 時，y 有最大值 k，沒有最小值。
2. x 有範圍時，
   (1) 若 $a>0$，當 x 愈接近 h 時（$|\,x-h\,|$ 愈小），y 值愈小。
   (3) 若 $a<0$，當 x 愈接近 h 時（$|\,x-h\,|$ 愈小），y 值愈大。
3. 這些性質可由函數圖形中看出。

五、二次不等式

當判別式 $b^2-4ac>0$ 時，可化為 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$，$\alpha<\beta$

1. $(x-\alpha)(x-\beta)<0 \Leftrightarrow \alpha<x<\beta$
2. $(x-\alpha)(x-\beta)\le 0 \Leftrightarrow \alpha\le x\le\beta$
3. $(x-\alpha)(x-\beta)>0 \Leftrightarrow x>\beta$ 或 $x<\alpha$
4. $(x-\alpha)(x-\beta)\ge 0 \Leftrightarrow x\ge\beta$ 或 $x\le\alpha$



六、二次函數的三種格式

1. $a\ne 0$，$y=ax^2+bx+c$ 為二次函數標準式。
2. $a\ne 0$，$y=a(x-h)^2+k$ 的頂點 (h, k)。
3. $a\ne 0$，$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ 與 x 軸交於 $(\alpha, 0)$、$(\beta, 0)$。

七、二次式的恆值定理（其中 a, b, c 為實數，$a\ne 0$）

1. 對於任意實數 x，$ax^2+bx+c>0$ 恆成立 $\Leftrightarrow$ $a>0$ 且 $b^2-4ac<0$
2. 對於任意實數 x，$ax^2+bx+c\ge 0$ 恆成立 $\Leftrightarrow$ $a>0$ 且 $b^2-4ac\le 0$
3. 對於任意實數 x，$ax^2+bx+c<0$ 恆成立 $\Leftrightarrow$ $a<0$ 且 $b^2-4ac<0$
4. 對於任意實數 x，$ax^2+bx+c\le 0$ 恆成立 $\Leftrightarrow$ $a<0$ 且 $b^2-4ac\le 0$

5. 說明：

(1) 上述四個性質容易混淆，最好利用圖形來認。

(2) x 的不等式有兩種要分清楚：「解不等式」是要找出滿足不等式的 x。
「不等式恆成立」是指任意 x 代入都成立。

(3) 充要條件：「$f(x)>0$ 恆成立」$\Leftrightarrow$「$y=f(x)$ 的圖形在 x 軸上方」

八、單項函數：$f(x)=ax^n$，其中 $a\ne 0$，n 為正整數

1. n 為奇數時，f 的圖形對稱於原點。
2. n 為偶數時，f 的圖形對稱於 y 軸。

實例運用【81聯考社會組，填充4】

設 k 為實數，且 $y=x^2+kx+k$ 的圖形與直線 $y=x+1$ 沒有交點，則 k 的範圍為______。

答案：$1<k<5$

說明：

這題為標準題，「沒有交點」$\Leftrightarrow$ $x^2+kx+x=x+1$ 無解。

實例運用【92學測，選填F】

設 k 為一整數。若方程式 $kx^2+7x+1=0$ 有兩個相異實根，且兩根的乘積介於 $\frac{5}{71}$ 與 $\frac{6}{71}$ 之間，則 $k=$ ______。

引導思考：

❶ 已知「k 為整數」、「$kx^2+7x+1=0$ 有兩相異實根」、「兩根乘積介於 $\frac{5}{71}$ 與 $\frac{6}{71}$ 之間」可能如何使用？

➡「k 為整數」是輔助條件；

「$kx^2+7x+1=0$ 有兩相異實根」可得「判別式 >0」；

「兩根乘積介於 $\frac{5}{71}$ 與 $\frac{6}{71}$ 之間」可得一個不等式。

❷ 求解「$k=$ ？」可能如何得到？

➡ 需要一個方程式解 k，但條件中根本沒有等式，怎麼辦？

➡ 因為 k 為整數，只要有 k 的範圍就可能求出 k，所以由兩個不等式去做。

答案：12

詳解：

$kx^2+7x+1=0$ 有兩個相異實根

$\Rightarrow\ 7^2-4\times k\times 1>0\ \Rightarrow\ k<\frac{49}{4}=12.25$

又 k 為整數，故 $k\le 12$

兩根乘積介於 $\frac{5}{71}$ 與 $\frac{6}{71}$ 之間 $\Rightarrow\ \frac{5}{71}<\frac{1}{k}<\frac{6}{71}\ \Rightarrow\ \frac{71}{5}>k>\frac{71}{6}$

$\Rightarrow\ 14.2>k>11.8\ldots$，又 k 為整數，故 $k=12$ 或 13 或 14

綜合得 $k=12$

說明：

❶ 這題答對率 35%。

❷ 在這題裡，本就是用不等式求 $k=$ ？故

「$kx^2+7x+1=0$ 有兩相異實根 $\Rightarrow$ 判別式 >0」是主要條件。

實例運用【93指考數乙，選填A】

設 a 為實數，令 α、β 為二次方程式 $x^2+ax+(a-2)=0$ 的兩個根。試問當 a 為何值時，$|\alpha-\beta|$ 有最小值？答：$a=$ ______。

引導思考：

❶ 已知「a 為實數」可能如何使用？

➡ 這是輔助條件，因為是極值問題，故限制 a 為實數，可先擱著。

❷ 已知「α、β 為 $x^2+ax+(a-2)=0$ 兩根」可能如何使用？

➡ 解出方程式，或用根與係數關係。

❸ 求解「當 a 為何值時，$|\alpha-\beta|$ 有最小值」可能如何得到？

➡ 將 $|\alpha-\beta|$ 表為 a 的代數式，再考慮如何求最小值。

答案：2

詳解：

根與係數關係得 $\begin{cases}\alpha+\beta=-a\\ \alpha\beta=a-2\end{cases}$

$|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-a)^2-4(a-2)=a^2-4a+8=(a-2)^2+4$

當 $a=2$ 時，$|\alpha-\beta|^2$ 最小，$|\alpha-\beta|$ 也最小。

說明：

❶ 這題答對率 59%。

❷ a 為實數，但 α、β 也一定為實數嗎？

判別式 $(-a)^2-4(a-2)=a^2-4a+8=(a-2)^2+4>0$，故 α、β 為實數。

考慮到更好，沒考慮也不影響答案。

實例運用【96指考數乙，多選6】

假設 a，b 是整數，且 $b\neq 0$。已知 $c=\frac{a}{3}+\frac{b\sqrt{2}}{3}i$ 是實係數一元二次方程式 $x^2+kx+1=0$ 的一個解。請問下列哪些選項是正確的？

(1) $\frac{1}{c}$ 是上述方程式的另外一個解　(2) $\frac{1}{c}=\frac{a}{3}-\frac{b\sqrt{2}}{3}i$　(3) $c+\frac{1}{c}=k$

(4) k 一定是整數　(5) a 一定是奇數

引導思考：

❶ 已知「a，b 是整數，且 $b\neq 0$」可能如何使用？

➡ 這是輔助條件，使 c 為虛根且實部、虛部可以 a, b 表示。

❷ 已知「$c=\frac{a}{3}+\frac{b\sqrt{2}}{3}i$ 是實係數 $x^2+kx+1=0$ 解」可能如何使用？

➡ 由二次方程式的公式解，有兩虛根 $c=\frac{a}{3}\pm\frac{b\sqrt{2}}{3}i$；

用根與係數關係，兩根乘積為 1，兩根和為 $-k$。

❸ 五個選項逐個討論。

答案：(1)(2)(5)

詳解：

選項 (1)：兩根乘積為 1，一根為 c，則另一根為 $\frac{1}{c}$，(1) 對。

選項 (2)：另一根為 $\frac{1}{c}$，另一根也為 $\frac{a}{3}+\frac{b\sqrt{2}}{3}i$ 的共軛虛數 $\frac{a}{3}-\frac{b\sqrt{2}}{3}i$，(2) 對。

選項 (3)：$c+\frac{1}{c}$ 為兩根和，應為 $c+\frac{1}{c}=-k$，顯然 $k\neq 0$，(3) 錯。

選項 (4)：兩根乘積為 1 $\Rightarrow$ $(\frac{a}{3}+\frac{b\sqrt{2}}{3}i)(\frac{a}{3}-\frac{b\sqrt{2}}{3}i)=1$ $\Rightarrow$ $\frac{a^2}{9}+\frac{2b^2}{9}=1$

$\Rightarrow$ $a^2+2b^2=9$，又 a, b 是整數，且 $b\neq 0$，則 $a=\pm1$，$b=\pm2$

兩根和為 $-k$ $\Rightarrow$ $(\frac{a}{3}+\frac{b\sqrt{2}}{3}i)+(\frac{a}{3}-\frac{b\sqrt{2}}{3}i)=-k$

$\Rightarrow$ $k=-\frac{2a}{3}=\pm\frac{2}{3}$，$k$ 不為整數，(4) 錯。

選項 (5)：$a=\pm1$ 一定是奇數，(5) 對。

說明：

❶ 這題答對率 26%，屬於難題。

❷ 雖只是二次方程式，但牽扯各種性質，不易考慮周全。

❸ 好像條件少一個，但 a, b 為整數，依然可解出 a, b, k。

實例運用【82聯考社會組，填充3】

若 a 與 $a+2$ 為異號的兩實數，且均為方程式 $x^2+|x|+3k=0$ 的解，

則 $k=$ ________。

引導思考：

❶ 已知「a 與 $a+2$ 為異號的兩實數」可能如何使用？

➡ 因為 $a<a+2$，故 $a<0$ 且 $a+2>0$。

❷ 已知「a 與 $a+2$ 均為方程式 $x^2+|x|+3k=0$ 的解」可能如何使用？

➡ 方程式的解代入方程式成等式。

❸ 方程式 $x^2+|x|+3k=0$ 可如何解？

➡ 1. 分成 $x\geq 0$ 與 $x<0$ 討論。

2. 看成 $|x|^2+|x|+3k=0$，先解出 $|x|$，再解出 x。

❹ 求解「k」可能如何得到？

➡ 需要一個 k 的等式，若也用到 a，則需要二個 a, k 的等式。

答案：$-\dfrac{2}{3}$

詳解：

a 與 $a+2$ 異號，$a<a+2 \Rightarrow a<0<a+2$

a 與 $a+2$ 均為方程式 $x^2+|x|+3k=0$ 的解

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+|a|+3k=0 \\ (a+2)^2+|a+2|+3k=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-a+3k=0 \\ (a+2)^2+(a+2)+3k=0 \end{cases}$$

（消去 k）$\Rightarrow (a+2)^2+(a+2)=a^2-a \Rightarrow 6a+6=0 \Rightarrow a=-1$

代回 $a^2-a+3k=0$ 得 $(-1)^2-(-1)+3k=0 \Rightarrow k=-\dfrac{2}{3}$

另解：

$x^2+|x|+3k=0 \Rightarrow |x|^2+|x|+3k=0$，設解出 $|x|=\alpha, \beta$

由根與係數關係得 $\alpha+\beta=-1$，α, β 可為一正一負或二負。

若 $\alpha, \beta<0$，則 x 無解，不合。若 $\alpha<0<\beta$，則 $x=\pm\beta$

所以 $a+(a+2)=0 \Rightarrow a=-1$

-1 為 $x^2+|x|+3k=0$ 一根 $\Rightarrow 1+1+3k=0 \Rightarrow k=-\dfrac{2}{3}$

說明：

❶ 詳解中，直接用根的定義，二根代入即得二方程式，恰可解 a, k 二未知數。

❷ 另解中，運用代換解方程式 $x^2+|x|+3k=0$，找出 a 與 $a+2$ 的關係。

實例運用【83學測，多選8】

若函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形如圖 3，
則下列各數哪些為負數？

(A) a　(B) b　(C) c

(D) b^2-4ac　(E) $a-b+c$

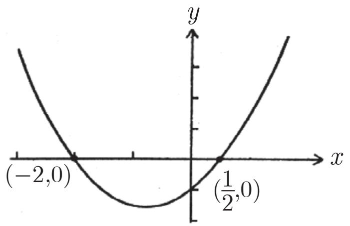


圖3

答案：(C)(E)

說明：這題為標準題，其中 $a-b+c=f(-1)$ 為 $x=-1$ 時相應的 y 坐標。

實例運用【90學測，多選5】

設 a, b, c 為實數。若二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形通過 $(0,-1)$ 且與 x 軸相切，則下列選項何者為真？

(1) $a<0$　(2) $b>0$　(3) $c=-1$　(4) $b^2+4ac=0$　(5) $a+b+c\le 0$

引導思考：

❶ 已知「a, b, c 為實數」可能如何使用？

➡ 是輔助條件，實係數函數才有圖形及相關結果，可先不管。

❷ 已知「二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$」可能如何使用？

➡ 是輔助條件，隱含 $a\neq 0$，可先不管。

❸ 已知「通過 $(0,-1)$」可能如何使用？

➡ 通過 $(0,-1)$ $\Leftrightarrow$ $f(0)=-1$ $\Leftrightarrow$ $c=-1$

❹ 已知「與 x 軸相切」可能如何使用？

➡ 與 x 軸相切 $\Leftrightarrow$ $f(x)=0$ 恰一實根 $\Leftrightarrow$ $b^2-4ac=0$

❺ 這些已知可能再得出什麼結果？

➡ 兩條件無法完全解出 $f(x)$，$f(x)$ 不是唯一的。

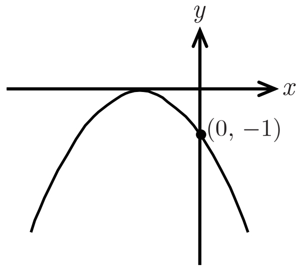
➡ 可畫圖觀察；也可由兩式 $c=-1$、$b^2-4ac=0$ 推論。

❻ 五個選項逐個討論。

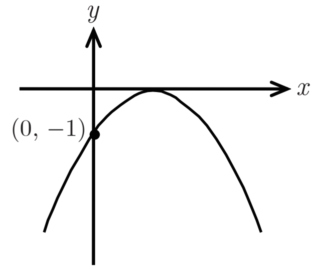
答案：(1)(3)(5)

詳解：（由幾何圖形觀察）

選項 (1)：通過 $(0,-1)$ 且與 x 軸相切，則只可能如下圖的兩種狀況，所以 $a<0$。(1) 對。



圖(一)



圖(二)

選項 (2)：如圖 (一) 則 $b<0$，如圖 (二) 則 $b>0$。(2) 錯。

選項 (3)：通過 $(0,-1)$ 則 $c=-1$。(3) 對。

選項 (4)：與 x 軸相切，則 $b^2-4ac=0$，而且 $ac\neq 0$，故 $b^2+4ac\neq 0$。(4) 錯。

選項 (5)：$a+b+c=f(1)$，由圖可知 $f(1)\le 0$，(5) 對。

另解：（由代數式 $a\neq 0$，$c=-1$、$b^2-4ac=0$ 推論）

❶ 選項 (3) 對。

❷ $c=-1$、$b^2-4ac=0\ \Rightarrow\ b^2+4a=0\ \Rightarrow\ a=-\dfrac{b^2}{4}\leq 0$

又 $a\neq 0$，則必 $a<0$，選項 (1) 對。

❸ 將 $c=-1$、$b^2+4a=0$ 代入得 $a+b+c=-\dfrac{b^2}{4}+b-1=-\dfrac{1}{4}(b-2)^2<0$

選項 (5) 對。

❹ $(a,\ b,\ c)=(-1,\ -2,\ -1)$ 滿足 $a\neq 0$，$c=-1$、$b^2-4ac=0$，選項 (2) 錯。

❺ 將 $c=-1$、$b^2+4a=0$ 代入得 $b^2+4ac=-4a-4a=-8a>0$，選項 (4) 錯。

說明：

❶ 這題可由圖形或代數式判斷，解題時也可兩者交錯使用，更易判斷。

❷ 由圖形判斷通常比較簡捷，但要考慮周全，例如此題，如果只考慮圖 (二) 而沒想到圖 (一)，選項 (2) 就會出錯。

❸ 對於推不出的選項，最好能找出反例再確定是錯的。

實例運用【87學測，多選9】

設 a 與 b 均為實數，且二次函數 $f(x)=a(x-1)^2+b$ 滿足 $f(4)>0$, $f(5)<0$。試問下列何者為真？

(1) $f(0)>0$　(2) $f(-1)>0$　(3) $f(-2)>0$　(4) $f(-3)>0$　(5) $f(-4)>0$

引導思考：

❶ 已知「a 與 b 均為實數」可能如何使用？

➡ 輔助條件，$y=f(x)$ 為實係數，才會有不等式、圖形。

❷ 已知「二次函數 $f(x)=a(x-1)^2+b$」可能如何使用？

➡ 實際上只有頂點 x 坐標為 1、$a\neq 0$。

➡ 圖形對稱於 $x=1$。

❸ 已知「$f(4)>0,\ f(5)<0$」可能如何使用？

➡ $f(4),\ f(5)$ 是 $x=4,\ 5$ 相應的 y 坐標。

➡ 圖形上，$(4,\ f(4))$ 在 x 軸上方，$(5,\ f(5))$ 在 x 軸下方。

❹ 求解可能如何由圖形上判斷？如何由代數式上判斷？

➡ 圖形上判斷，$x=0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4$ 相應的點在 x 軸上方或下方。

答案：(1)(2)(3)

詳解：（由圖形判斷）

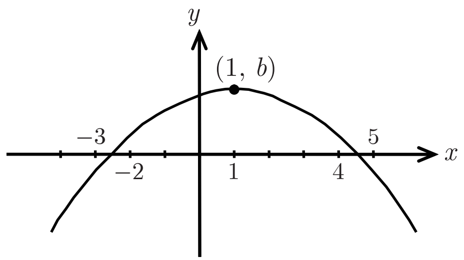
由頂點 x 坐標為 1，

$(4,\ f(4))$ 在 x 軸上方，$(5,\ f(5))$ 在 x 軸下方

$\Rightarrow$ 圖形與 x 軸一交點在 4, 5 之間

由於圖形對稱於直線 $x=1$，

$\Rightarrow$ 圖形與 x 軸另一交點在 $-3,\ -2$ 之間



圖形如右圖，可判斷 $f(0)>0$、

$f(-1)>0$、$f(-2)>0$、$f(-3)<0$、$f(-4)<0$

故選 (1)(2)(3)。

另解：（由代數式推論）

由 $f(x)=a(x-1)^2+b$，$f(4)>0$，$f(5)<0$

$$\Rightarrow\ \begin{cases}9a+b>0\\16a+b<0\end{cases}\ \Rightarrow\ a<0$$

可得 $f(0) = a + b = (9a + b) - 8a > 0$；$f(-1) = 4a + b = (9a + b) - 5a > 0$；

$f(-2) = 9a + b > 0$；$f(-3) = 16a + b < 0$；$f(-4) = 25a + b = (16a + b) + 9a < 0$

故選 (1)(2)(3)

說明：

❶ 由圖形判斷即可，但要能充分把握各條件的幾何意義。

❷ 另解中由代數式推論也可。

實例運用【78夜大社會組，非選擇一】

設不等式 $ax^2 + 2(2a - 1)x + (7a - 2) < 0$ 對於一切實數 x 均成立，

試求其中常數 a 之範圍。

答案：$a < -1$

說明：這題為標準題，代入公式就可得解。

實例運用【86學測，單選3】

設 $f(x)$ 為二次函數，且不等式 $f(x) > 0$ 之解為 $-2 < x < 4$，則 $f(2x) < 0$ 之解為

(1) $-1 < x < 2$　(2) $x < -1$ 或 $x > 2$　(3) $x < -2$ 或 $x > 4$

(4) $-4 < x < 8$　(5) $x < -4$ 或 $x > 8$

引導思考：

❶ 已知「二次不等式 $f(x) > 0$ 之解為 $-2 < x < 4$」可能如何使用？

➡ 將解二次不等式的方法倒過來想：什麼樣的二次不等式解為 $-2 < x < 4$ ？

❷ 求解「$f(2x) < 0$」可能如何得到？

➡ 能得到 $f(x)$，就可代入解 $f(2x) < 0$

答案：(2)

詳解：

二次不等式 $f(x) > 0$ 之解為 $-2 < x < 4$

$\Rightarrow f(x) = a(x + 2)(x - 4)$ 且 $a < 0$

所以 $f(2x) < 0 \Rightarrow a(2x + 2)(2x - 4) < 0 \Rightarrow (2x + 2)(2x - 4) > 0$

$\Rightarrow (x + 1)(x - 2) > 0 \Rightarrow x < -1$ 或 $x > 2$，選 (2)。

另解：

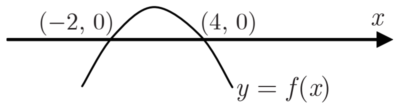
二次不等式 $f(x) > 0$ 之解為 $-2 < x < 4$

$\Rightarrow y = f(x)$ 開口向下且與 x 軸交於 $(-2, 0)$、$(4, 0)$

$\Rightarrow f(x) < 0$ 的解為 $x < -2$ 或 $x > 4$

$\Rightarrow f(2x) < 0$ 的解為 $2x < -2$ 或 $2x > 4$

（將所有 x 都以 $2x$ 代換）



$\Rightarrow$ $f(2x) < 0$ 的解為 $x < -1$ 或 $x > 2$，選 (2)。

說明：

❶ 詳解由代數式去想，另解由函數圖形去觀察，都能解出。

❷ 如果只用特例 $f(x) = -(x+2)(x-4)$ 去解也能得到答案。

實例運用【97指考數乙，多選7】

請問對於下列哪些選項，可以找到實數 a，使得選項裡面所有的數都同時滿足一元二次不等式 $x^2 + (2-a)x - 2a < 0$ ？

(1) -1 , 0　(2) 1 , 2 , 3 , ⋯（所有的正整數）

(3) -3 , -4 , -5 , ⋯（所有小於 -2 的整數）(4) 97 , 2008

(5) $-\pi$, π（π 是圓周率）

引導思考：

❶ 已知「a 為實數」可能如何使用？

➡ 這是輔助條件，實數才有不等關係，先擱著。

❷ 已知「$x^2 + (2-a)x - 2a < 0$」可能如何使用？

➡ 這不等式能解嗎？

❸ 求解式判斷「存在 a 使得不等式有這些解」可能如何得到？

➡ 問法很奇特，尤其有 $-\pi$, π 這類奇怪的東西。

➡ 還是該從不等式著手。

❹ 五個選項逐個判斷。

答案：(1)(4)

詳解：

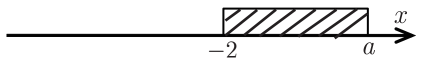
$x^2 + (2-a)x - 2a < 0 \Rightarrow (x^2 + 2x) - (ax + 2a) < 0$

$\Rightarrow x(x+2) - a(x+2) < 0 \Rightarrow (x-a)(x+2) < 0$

$\Rightarrow$ x 在 a 與 -2 之間

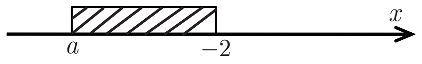
若 $a > -2$，則解為 $-2 < x < a$；

圖一



若 $a < -2$，則解為 $a < x < -2$；

圖二



若 $a = -2$，則無解。

解的圖形如右兩圖之一。

選項 (1)：當 $a > 0$ 時，圖一包含 -1 , 0，(1) 對。

選項 (2)：無論 a 多大，總有正整數比 a 大，圖一無法包含所有正整數，(2) 錯。

選項 (3)：無論 a 多小，總有負整數比 a 小，圖二無法包含所有小於 -2 的整數，(3) 錯。

選項 (4)：當 $a > 2008$ 時，圖一包含 97, 2008，(4) 對。

選項 (5)：$-\pi < -2$ 且 $\pi > -2$，圖一無法包含 $-\pi$，圖二無法包含 π，(5) 錯。

說明：

❶ 這題答對率 7%，是該年答對率最低的一題。

❷ 最大困難點是沒發現 $x^2 + (2-a)x - 2a$ 可簡單分解，這種情況確實少見，但在一般方法解不出時，仍是方法之一。

實例運用【101指考數乙，非選擇題一】

設二次實係數多項式函數 $f(x)=ax^2+2ax+b$ 在區間 $-1\le x\le 1$ 上的最大值為 7、最小值為 3。試求數對 (a,b) 的所有可能值。

引導思考：

❶ 已知「二次實係數」可能如何使用？

➡ 這是輔助條件，也可看成 $a\neq 0$ 且 a, b 為實數，先擱著。

❷ 已知「在區間 $-1\le x\le 1$ 上的最大值為 7、最小值為 3」可能如何使用？

➡ 二次式在有範圍時的極值，要配方再考慮頂點 x 坐標與 a 的正負。

❸ 二條件「最大值為 7」、「最小值為 3」求 a, b 二未知數。

➡ 將最大值、最小值表為 a, b 的式子。

❹ 何處有最大值？何處有最小值？

➡ 此與 a 的正負有關，但題目沒指明怎麼辦？

➡ 最無奈的辦法是：分成 $a>0$ 與 $a<0$ 兩情形討論。

❺ 求解「(a,b) 的所有可能值」可能有何暗示？

➡ 題目強烈暗示答案可能不只一組解，解題時要注意。

答案：$(a,b)=(1,4)$ 或 $(-1,6)$

詳解：

❶ 配方 $f(x)=ax^2+2ax+b=a(x+1)^2-a+b$

❷ 當 $a>0$ 時，x 最接近 -1 時 $f(x)$ 最小，x 離 -1 最遠時 $f(x)$ 最大。

又 $-1\le x\le 1$，所以最小值為 $f(-1)=3$，最大值為 $f(1)=7$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(-1)=-a+b=3 \\ f(1)=a+2a+b=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases}$$，滿足 $a>0$，這是一解。

❸ 當 $a<0$ 時，x 最接近 -1 時 $f(x)$ 最大，x 離 -1 最遠時 $f(x)$ 最小。

又 $-1\le x\le 1$，所以最大值為 $f(-1)=7$，最小值為 $f(1)=3$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(-1)=-a+b=7 \\ f(1)=a+2a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=6 \end{cases}$$，滿足 $a<0$，此也為一解。

❹ 故得 $(a,b)=(1,4)$ 或 $(-1,6)$

說明：

❶ 這題只使用基本的二次函數配方求極值。

❷ 當題目反過來問，已知極值而去求二次函數，加上必須依 a 的正負討論，所以還需要精確的邏輯才能做對。

實例運用【94指考數甲，多選4】

設 $f(x)=x^2+a(1-x^2)$ 為一實係數多項式函數，a 為常數。下列敘述何者正確：

(1) 不論 a 是何值，$f(x)$ 的函數圖形都不可能是直線。

(2) 不論 a 是何值，若 $f(x)$ 有極值，則極值都等於 a。

(3) 0 有可能是 $f(x)$ 的極大值。

(4) 若 $a\neq 0$，則 $f(x)=0$ 無重根。

引導思考：

❶ 已知「$f(x) = x^2 + a(1 - x^2)$」可能如何使用？

➡ 化為標準式 $f(x) = (1 - a)x^2 + a$ 再考慮。

➡ 當 $a \neq 1$ 時，$f(x)$ 為二次式；當 $a = 1$ 時，$f(x) = 1$ 為常數函數。

❷ 已知「實係數」可能如何使用？

➡ 是輔助條件，實係數多項式才有圖形，可先不管。

❸ 四個選項逐個討論。

答案：(2)(4)

詳解：

選項 (1)：$y = f(x)$ 為一直線 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 為一次式或常數

當 $a = 1$ 時，$f(x) = 1$ 為一直線，(1) 錯。

選項 (2)：當 $a \neq 1$，$f(x) = (1 - a)x^2 + a$，極值為 $f(0) = a$

當 $a = 1$ 時，$f(x) = 1$，極值為 1，(2) 對。

選項 (3)：若 $f(x)$ 有極大值 a，則 $1 - a < 0 \Rightarrow a > 1$，極大值 a 不為 0，(3) 錯。

選項 (4)：$Ax^2 + Bx + C = 0$ 有重根 $\Leftrightarrow$ $A \neq 0$ 且判別式 $B^2 - 4AC = 0$

$f(x) = 0$ 有重根 $\Leftrightarrow$ $1 - a \neq 0$ 且 $0^2 - 4(1 - a)a = 0$ $\Leftrightarrow$ $a = 0$

所以若 $a \neq 0$，則 $f(x) = 0$ 無重根，(4) 對。

說明：

❶ 這題答對率 30%，答對率偏低，選項涵蓋圖形、極值、根，都只觸及最基本的性質。

❷ 題目所給形式 $f(x) = x^2 + a(1 - x^2)$ 並不好用，應先將 $f(x)$ 化為標準式再看。