

遇見更好的自己

卡內基6大夢想實踐力

每一個人都擁有夢想，渴望成功別以為只有成年人才能說話大聲，才具有影響力事實上，家庭、學校、社團和人際圈子都是青少年從小訓練培養夢想實踐力的基地

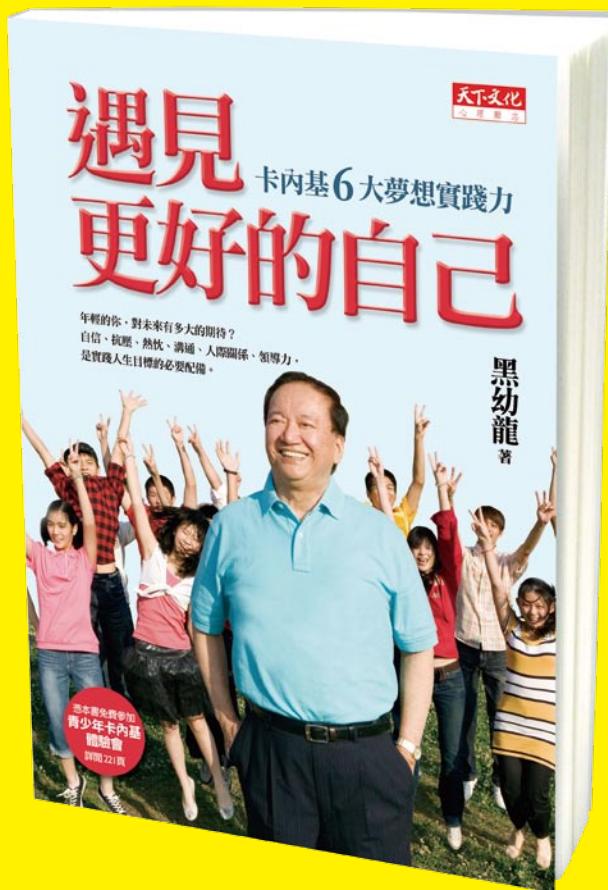
台灣卡內基創辦人黑幼龍先生提出六個青少年時期應該培養的關鍵能力：

自信、抗壓、熱忱、溝通、人際關係、影響力
這些能力的重要性及培養方法，將給年輕朋友無限激勵

《遇見更好的自己》有大量青少年實例，包括親子關係、同儕關係、學業問題、感情問題、自我發展等非常貼近青少年現實生活，實用價值高

年輕的你，現在開始實踐夢想，遇見更好的自己！

黑幼龍·著 定價250元



觀念數學 1

如何學好中學數學

試讀本

預計2009年6月10日正式出版
詳見www.bookzone.com.tw

北一女「數理資優班」數學老師
北市教育局高中數學輔導團團員 **任維勇 著**



物理奧林匹亞金牌得主，都讀什麼書？
家住雲林的林裕盛，及住台北的彭陸
在交給教育部的個人簡介中，
不約而同都提到了小時候讀的
「觀念物理」這套書，
開啟了他們對物理世界的認識及興趣。

——摘錄自聯合報 2008/7/29

觀念物理
全套六冊
休伊特 著
定價：2,350 元



★全套六冊合裝，全彩印刷
★內容編排適合國、高中學生閱讀
★穿插精彩照片及活潑漫畫，引發學習興趣

聯合報頭版 頭條

物理奧林匹亞奪五金 「觀念物理」打下基礎

- 台灣印行突破400,000冊
- 全國重點高中指定閱讀
- 趨勢科技董事長張明正特別推薦，並贈送給奧林匹亞科學競賽學生

《觀念物理》是很好的一套物理入門書
——台大物理系張慶瑞教授

對物理有興趣的學生會自己找《觀念物理》來讀
——建中物理老師李泗賓

延伸推薦



觀念化學
全套五冊
定價：2,000 元



觀念生物學
全套四冊
定價：1,440 元

「觀念數學」第一發

林榮崧 天下文化科學館總監

2008年7月29日，鳳凰颱風飄掠台灣過後，聯合報頭版登出斗大的頭條新聞，不是災難消息，也不是政壇風暴，而是：「奧林匹亞，我奪五金，《觀念物理》打下基礎！」

原本在中學生、老師和關心子女教育的家長之間，默默蓄醞多年的「觀念熱」，自此突然沸騰起來，幾乎人人皆知。

很多讀者詢問：天下文化出版了《觀念物理》、《觀念生物學》和《觀念化學》，為什麼沒出版《觀念數學》？會不會出版《觀念數學》呢？

事實上，從《觀念物理》一推出，我們就在尋找「能確實幫助中學生正確學習、理解及思考」的《觀念數學》叢書。直到今年2月，有幸看到任維勇老師的初稿，才讓我們拍案驚嘆：對！這就是完全符合我們心中定義的《觀念數學》書稿！

我們希望，任老師的這本《如何學好中學數學——觀念數學（1）》，能獲得各位優秀教師的熱烈推廣，尤其是從今年夏天起，即推薦給中學生當暑假讀物，儘快幫助學生和家長，建立正確學習數學的觀念和方法；同時也期盼，擁有中學教學實務經驗的老師與教授，能夠針對中學數學課程的內涵，不吝於提筆分享您的灼見，協助天下文化拓展及充實《觀念數學》叢書。

如何學好中學數學

全書目錄

前言

第一章 打破數學學習的迷思

- 迷思 1. 國中數學是這樣學的，高中數學也應該這樣學。
- 迷思 2. 國中數學都學不好，高中數學沒救了。
- 迷思 3. 數學學不好就是因為演算題目不夠。
- 迷思 4. 多背點公式就能解出題目了。
- 迷思 5. 多學點特殊技巧就可以解出難題。
- 迷思 6. 懂不懂沒關係，反正我會做題目就好。
- 迷思 7. 我懂這是什麼，只是我說不出來。
- 迷思 8. 數學考不好，趕快去補習就可以了。
- 迷思 9. 數學考不好，趕快請家教就可以了。
- 迷思 10. 數學學不好，因為我的頭腦不好。
- 迷思 11. 多看幾遍自然就懂了。

第二章 數學的特性與學習

- 1. 學習數學的歷程 —— 一張藍圖
- 2. 數學是理解的科目
- 3. 數學題目可以分成三種層級
- 4. 數學是絕對精確的
- 5. 數學需要不斷的思考
- 6. 數學題目非常多又非常相似
- 7. 數學的內容是環環相扣，累積起來的。
- 8. 數學是有趣的
- 9. 只要方法正確，個人都能學好高中數學

第三章

正確學習數學的方法

1. 新學一個定義

- 1-1 數學化的定義
- 1-2 深入了解一個定義
- 1-3 數學化定義也可能有很多種
- 1-4 直觀的定義與數學化的定義交互使用
- 1-5 定義有主要部分與附帶條件
- 1-6 類似定義的數學式

2. 新學一個公式或定理

- 2-1 哪些公式要背？
- 2-2 深入了解一個定理
- 2-3 實例說明

3. 如何去記一個公式或定理

- 3-1 多半公式不需要死背
- 3-2 算熟了就自然記下來
- 3-3 用特例去推廣公式
- 3-4 用性質或特例去記公式
- 3-5 可以互推的公式只記一個
- 3-6 類似公式一起背
- 3-7 用一個公式去推其他公式
- 3-8 只記公式的關鍵
- 3-9 用圖形記公式

4. 注意等價的關係

5. 基本的解題策略

- 5-1 什麼是解題策略？
- 5-2 條件與求解（或求證）數學化
- 5-3 找尋條件與求解的關係

- 5-4 化簡的方向
- 5-5 假設未知數，再列方程式解之
- 5-6 條件式可以用來消去變數
- 5-7 題目屬於哪個範疇？有什麼公式可用？
- 5-8 可否代換成簡單的型態？
- 5-9 運用解題策略

6. 熟練基本練習 —— 百分之百的理解

7. 理解標準題 —— 提升理解的層次

- 7-1 這個題目怎麼做？
- 7-2 為什麼這樣做是對的？
- 7-3 為什麼會想到要這樣做？
- 7-4 這一類的問題該怎麼做？
- 7-5 多幾個例子
- 7-6 學會深入思考問題

8. 學完一個段落 —— 構築解題策略

- 8-1 小範圍的解題策略
- 8-2 解題策略實例1：餘弦定理
- 8-3 中範圍的解題策略
- 8-4 解題策略實例2：餘式定理
- 8-5 解題策略實例3進一步的三角問題
- 8-6 大範圍的解題策略
- 8-7 解題策略實例4指數問題
- 8-8 解題策略實例5比大小問題
- 8-9 解題策略實例6算幾不等式
- 8-10 要建立自己的解題策略

9. 學習解思考題

- 9-1 解題思考的過程
- 9-2 解思考題的實例

- 9-3 解完思考題之後
- 9-4 有很多不同的解法

10. 考試作答技巧

- 10-1 看題目時慢一點、仔細一點
- 10-2 做完一題後，立刻重新看一遍題目
- 10-3 用代入特殊數值得答案
- 10-4 能不能猜答案
- 10-5 隨時記得驗算
- 10-6 作答卷寫清楚
- 10-7 其他該注意事項

11. 如何避免粗心錯？

- 11-1 純粹的粗心錯
- 11-2 不精確的粗心錯
- 11-3 不專心的粗心錯

第四章 解決數學學習的問題

1. 我的孩子在學校上數學課都聽不懂，怎麼辦？
2. 我的孩子上課都聽懂了，可是考試都不理想，怎麼辦？
3. 我的孩子小考都還不錯，可是段考就不太理想，怎麼辦？
4. 我的孩子總是容易粗心錯，怎麼辦？
5. 我的孩子記性不好，公式總是背不起來，怎麼辦？
6. 我的孩子各科都很好，只有數學差，怎麼辦？
7. 我的孩子每次打開數學課本就發呆，怎麼辦？
8. 資優生也可能會有問題

附錄

簡易邏輯 —— 數學的規則

來自教授、老師、學生的衷心推薦

本書出自第一線教師的現身說法，重點圍繞在數學思維與解題策略，內容極為豐富有用。至於在書寫風格上，作者則排除理論而直接訴諸實例，表現了樸拙的意義與價值。這是難得一見的一本中學數學學習指南，非常值得推薦。

——師大數學系 **洪萬生教授**

讀了任老師寫的這本書之後，相信你會發現數學一點都不困難，解題充滿樂趣，並且信心滿滿。

——台大數學系 **張海潮教授**

對於每一種我知道或者能想像的數學學習困難，任老師都有專業的評析與建議；而且他通常用慧黠的方式說出來。如果拿起這本書的是學生家長，可以先翻閱第四章。

——中央大學數學系 **單維彰教授**

「從基本開始，吃透範例，看穿結構，課本算十遍」，這是在建中任教時對學生的耳提面命。但是「基本觀念徹底釐清，理解公式的來由和步驟的推導，基礎穩固後自然觸類旁通」，卻是一知半解與追求速成的台灣學生最忽略的。很高興有這樣的一本書，告訴學生如何學數學才是正確的，希望這本書能夠導正錯誤的數學學習。

——高雄大學應用數學系 **游森棚副教授**
(曾任建國中學數理資優班教師)

想要學好數學先要喜歡數學，本書讓我們知道數學學習的關鍵，了解數學各單元是怎麼彼此連接，使我們面對數學時，不再那麼害怕，甚至喜歡上它，可以在最短的時間內，學到數學的本質與內涵。

——北一女中 **翁錫伍老師**

像一面能養顏美容的鏡子，直接地反映了學生學習數學的問題，並提出了精確的解決之道。

——北一女學生 **林姣雲** (98學測滿級分)

讓數學從此帶給你煥然一新而欣喜的感動。

——北一女學生 **蘇意涵** (英特爾國際科展「傑出青年科學家獎」)

前言

執教二十多年，看過很多令人同情的學生、無助的家長，他們耗費了很多時間與金錢，卻沒有收穫。只因找不到學習方法，造成學生的痛苦，家長的無奈。學生最大的問題在於學習方法，大多數同學都沿襲不正確的方式，效果始終有限，因為他們已經養成了固有的學習習慣，不是三言兩語可以改變的。很多老師都會不斷提醒學生：「要理解，要思考，不要死背。」可是很少人能告訴學生如何理解、思考？如何學好高中數學？

所謂不正確的方式，就是過度使用記憶與熟練代替應有的理解與思考。很多學生就是這樣學數學：上課專心聽講、抄筆記，回家後拿出筆記，先背公式，然後將老師教過的再看一次，或照著筆記再算一次，然後拿出參考書，努力做題目，會的就做，不會的就看解答，不懂的就記下來。這樣也不能說錯，只是好像少了什麼？不錯，少了思考。**高中數學最重要的是邏輯的因果關係，而計算過程是工具。**模仿與熟練只有在最基本處，真正的學習是解決問題的能力。只在記憶與熟練，當然效果有限。

簡單的說，數學學習的最後成果是解題，解題的過程需要思考。數學思考與生活思考很類似，只是需要更精確。而且先要對數學內容有充分理解，才能夠運用數學知識做思考工具。**深入的理解、精確的態度與自然的思考，就能學好數學。**詳細的說，就是本書的內容。

坊間也有不少有關數學學習的書籍，大多是翻譯國外著作。有的適用於研究者，談的是大環境、大方向；有的適用資優生，談的是解題的技術；有的只是用趣味碰觸數學，而無實際幫助。沒有一本是針對高中生的數學學習。

我用了兩年多寫出這本書，針對高中生，詳細寫出正確的學習方法，其中範例也都取自目前國、高中的教材。同時也告訴學生為什麼要這樣做？只有先了解為何現在的學習無效，才能了解為什麼要改變習慣的方式，才願意試著用本書所說的方法。其中一部分的內容，也合適家長閱讀，讓家長也能了解該如何幫助孩子。本書所說的方式是高標準的，如能完全做到，必能成為數學高手。開始時也許很難完全做到，只要確認學習方向做下去，一旦習慣了，不但能學好數學，更能學得輕鬆，並且享受數學的樂趣。

在不同的階段也有不同的學習方法，國小、國中、高中、大學的學習方法與重點都有些不同，本書是針對高中階段的數學學習。也有少數國中生能以這樣的方式學數學，就是那些輕鬆又快樂學好數學的學生。不過由於國中生的心智成熟度與課程需要，也不用強求，以免揠苗助長，大約在國三時逐漸改變即可。而對於高中生，就必須用本書的方式學習了。將來上大學後，學習必須更深入，思考變得更精確。

本書共分四章。

第一章為**打破數學學習的迷思**，我列出11項似是而非，不完全正確，卻是很多人的直覺想法。我深入的說明或加以修正，希望破除這些迷思。建議家長與學生一起閱讀，也可以一起討論，當你們也能體會出，只靠記憶與熟練無法學好數學，才能真心願意去改變學習習慣。

第二章為**數學的特性與學習**，這裡要重建對數學的正確認識，也說明正確的學習態度。我要強調，學習數學所需要的思考與我們日常思考差別不大，只要運用自己的智慧，將它用在數學上。

第三章為**正確學習數學的方法**，也是本書最重要的一章，內容詳細解說學習數學的細節與數學思考的方法。請學生仔細閱讀，並自己想一想，是否這才是理解數學的方法？盡量照著做，最好還常能翻閱並檢視自己的學習。剛開始無法完全做到也沒關

係，先至少做到一部分，就會對數學有全新的感受，有效了再更全面性地去。

第四章為**解決數學學習的問題**，這一章我將學生的問題細分成多種類型，直接針對各種類型，提供最可能的原因與改進的方法。家長和學生可以一起想想問題出在哪裡？再做相應的改正。

附錄是**簡易的邏輯**，如要精確的學習數學，了解數學的邏輯是必要的，學生若還不清楚，就必須學習。我盡量用淺顯的方式說出重點，並將學生最容易犯的錯誤列出。

完成這本書要感謝所有教過我與被我教過的人，是你們讓我對數學學習有這麼深的感受。尤其是老婆在我寫書期間對我的包容，以及北一女中溫、良兩班寶貝給我的鼓勵，其中蘇意涵、林姝霏同學更給我很多寶貴意見。

如何使用本書——家長

首先，致上個人真摯的敬意。會閱讀本書的家長，不僅是關心孩子課業，而且是會去尋求適當方法的家長。教育孩子真的是門學問，也是挑戰，是一種甜蜜的辛苦。對父母而言，孩子的成長只有一次，失敗就很難重來。我也是孩子的爸，常常覺得教育的資訊不易取得，就書籍而言，只有學齡前教育比較充足，上國中以後幾乎就只看到參考書，明知道那是填鴨，可是有別的選擇嗎？

上高中以後，很少家長有辦法自己幫助孩子，我遇過不少父母是博士、教授，可是術業有專攻，他們也無法樣樣顧到。像我是高中數學老師，我也只懂數學，孩子的英文我就一竅不通了。

有人以為只有成績不好的學生家長才會覺得困擾，實際上，多半關心孩子的家長都戰戰兢兢的看著孩子成長，生活、課業、……，成績不好會令人擔心，成績好的希

望他更好，有時看到家長的焦慮甚至超過孩子。這裡順便提醒各位家長，去尋求更好的方法幫助孩子，而不是一味的要求孩子。還有，不要將自己的焦慮讓孩子看見，父母的焦慮有時也會變成孩子沉重的壓力。

即使各位家長完全不懂數學也無妨，請先仔細閱讀本書第一、二章，去了解數學的特性與學習的方式。這兩章與數學內容無關，每個人都可以看懂，也可以和孩子一起看，一起討論。了解數學的特性，才有辦法幫助孩子，而不只是一再要求孩子努力得高分而已，同時也知道孩子面對的困難是什麼，該怎樣去循著正確方法學數學。然後再看第四章，針對孩子的問題提醒孩子改正習慣。

如何使用本書——國中畢業生

首先，恭喜你進入學生生涯的新階段，既期待又怕被傷害，也恭喜你閱讀本書，踏出了正確的第一步。過去很多優秀的國中畢業生到了高中就受到嚴重的傷害，於是很多人盡量提早學習高中教材的內容，其實更重要的是要學習高中該有的學習態度與方法。

曾聽過一個建中資深老師說，他遇過一個學生，從高二開始，數學通常只有兩種成績：0分和5分，0分是正常的，5分是因為題目有錯而送分。能考上建中當然基測的數學成績一定很高，怎會有如此下場？不能適應高中數學，最後由挫敗到排斥變成放棄，令人惋惜。

我必須提醒，高中數學與國中數學真的很不同，難度與廣度加大是必然的，而學習的方法也能需要大幅的改變。回想從小學到國中階段，就有不少人被數學打敗了。通常不是不用功，而是學習方法無法隨階段改變，事實上求學（或人生）的每一個階段，

都有不同的方法和方向，不能順應變化而調整的，勢必被淘汰。

請先仔細閱讀第一、二章，先了解高中數學的難度，做好心理準備。再仔細閱讀第三章，完全不懂的例子可以跳過，等學到時再翻閱比較。隨時要拿出本書檢驗自己的學習方法是否正確？記著，本書提醒的是方法，照正確方法做下去才會有效果。

祝你們上高中後都有順利的起步。

如何使用本書——高中生

如果你已經讀完了高一數學，一定能體會高中數學變化多端，難以捉摸。閱讀本書後，一定會有很深的感觸。

不論你現在的數學成績如何，請先仔細閱讀第一、二章，想一想書中所說的是否有道理？再仔細閱讀第三章，比較一下自己的學習。對於定義、定理的理解夠深入嗎？解難題時有自己思考嗎？改變自己學習的方式是很困難的，了解自己是改變的第一步。

如果你正為數學苦惱，改變數學學習方法是唯一的路。改變永遠不遲，初期可能不適應，甚至因為破壞既有的節奏而痛苦。努力照著本書去做，做不徹底也無妨，先要求走對方向。首先掌握第三章第5節的「基本解題策略」，再配合深入的學習，試著自己去解題，很快就能對數學有新的感覺。

如果你是學習數學已有心得的學生，你應該有正確的方向，請你仔細研讀第三章第8節的「構築解題策略」，相信你一定會發現更多好方法，你也一定願意用更多的思考。本書會讓你再突破，讓你的數學百尺竿頭更進一步。

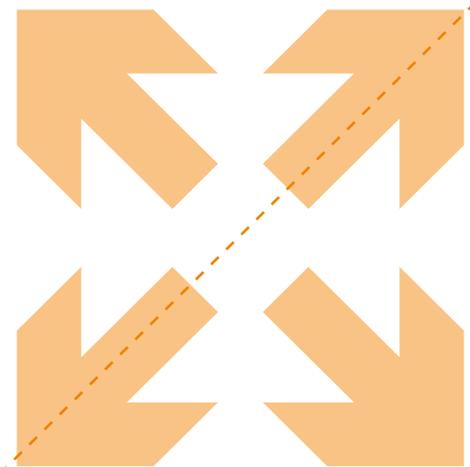
祝你們都能在數學中找到樂趣。

{ 以下內容，摘自本書第三章 }

+

第三章

正確學習 數學的方法



很多數學老師都會一再叮嚀學生：「學數學要理解，要思考，不要死背。」這是句金玉良言，可是對有些學生而言，這句話太空洞了，對一個習慣以記憶、熟練去面對數學的學生，他無法體會什麼是理解。這一章就是要更清楚地說明並舉例：如何去理解？理解些什麼？如何去思考？要思考些什麼？

坊間也有一些書在討論如何解題，各種方式、想法，洋洋灑灑一堆，可是對一般學生幾乎沒有幫助，因為他們遺漏了解題的基本能力。先要把定義、定理完全掌握，對學過的題目徹底了解，累積足夠的數學知識以後，才可能去談解題方法。如果基本功沒有紮實，解題只是美麗的空中樓閣，根本無法蓋起來。本章所提到的數學學習方法，可以說是非常全面性的。先了解怎樣學定義、定理，學習怎樣深入對題目的理解，然後再談如何解題，這時自然能水到渠成。

各節所詳述的方法都不是一下就可以達到，先了解該怎麼做，努力做下去就會愈來愈順手，也會逐漸體會到數學其實沒有那麼難。



2

新學一個公式或定理



公式通常是指「將一串常用而複雜的運算簡化成一個簡單結果」，例如：等差數列的首項為 a ，公差為 d ，則此等差數列的第 n 項 $a_n = a + (n - 1)d$ ，或是 $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ，熟記公式後就可以跳過其中的計算。照理說，忘記公式時則必須自行計算，多花一點時間還是可以解決問題。

定理通常是指「在某些特定條件下，必定會有一些結論」，例如餘式定理：多項式 $f(x)$ 除以 $x - c$ 的餘式為 $f(c)$ 。餘弦定理： $\triangle ABC$ 三對應邊長 a, b, c ，則 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A$ 。

通常定理的條件與結論比公式複雜，不過這只是大概的區分。不論是公式、定理，或被稱為性質、規律、引理或關係等等，都是數學上「可以證明，也可以直接引用」的工具。在本書中，我都統稱它們為公式或定理。它們可能只是幾個簡單步驟的結果，也可能是複雜觀念或計算所推出的結論，而在學習與使用的方法都差不多。

定理就像工具，能夠熟練使用才是最重要的。老師傅隨身帶幾樣工具，就能修理很多水電問題。我家有一套一百多件的工具組，可是我什麼都不會修。解決問題的是人而不是工具，同樣的，公式不用多，能精確又適切的使用才是重點。



2-1 哪些公式要背？

這很難訂出一個標準，通常也要隨個人學習進度或對自己的要求而決定。大致上，課本有的公式都要背，那些公式是學習到那個程度就應該要會的。至於其他的公式可以依據下面三個原則：

- 一、**只有經常會用到的公式才要背。**相對的，不常用的公式即使背了也會忘記，不如不背。當然不背公式的意思是寧願多花一點時間慢慢算出來。有些公式完全是針對一個題目量身打造的，背這種公式好像很棒，代入公式馬上就得到答案。但一段時間後，忘了公式就什麼都不會了，遇見稍有變化的題目也無法使用。更重要的是：背這種公式使我們不去做該有的思考，反而傷害了數學學習。
- 二、**只有能省略大段運算過程的公式才要背。**而且對公式的使用方法也要清楚。有的學生只記得「這個題目套這個公式」，而沒有仔細想清楚套用公式的時機與適用性，結果背公式就像背答案一樣了。相對的，如果可以簡單計算出結果的就不要背公式，寧願每次用算的。如果常用，會越算越快，最後算的跟背的一樣快，但是永遠不怕忘記，也不會記錯。
- 三、**有簡單道理可以簡單記得的公式也可以記。**這類公式的形式可能讓人看了就覺得很有道理，也有些定理由圖形上就能「感覺」它是對的。這種道理並不一定是精確的證明，我們記的只是「這看起來是對的，結果真的是對的」。這樣的公式或定理很多，有時我們也刻意去想出一些合理的解釋幫助我們去記定理。例如：等腰三角形的兩底角也相等（因為兩邊對稱）；三角形的大邊對應大角（畫幾個三角形就能感覺到）。

背太多不該背的公式也是一種錯誤的學習方法，只想依賴背公式來解題是一種錯誤的心態。簡單的判別方式：如果常感覺數學有背不完的公式，或者總覺得公式背了又忘，就該考慮是否硬去記那些不必記的公式了？

2-2 深入了解一個定理

有些學生看到公式或定理就背，然後學習如何套到題目中，然後做幾個類似題，做對了就以為學會定理了。如果只把學習重心放在解題上，而不是真正了解定理，當然將來就很難活用這些定理。學習目標應該是深度理解定理，理解定理本身才是最重要的，然後才是學會怎樣應用定理去解題。學通一個題目就只是一個題目，學通一個定理就會解一堆題目。

有一次剛檢討完考卷，曉菁帶著她的作答卷來問：「老師，我這樣做為什麼會錯？」我看了曉菁的作答，她誤用了一個定理，於是我反問她：「這裏為什麼可以這樣做？」曉菁看了我一眼，疑惑的問：「上次那題這樣做就對了呀。」曉菁的想法裡，她照著上次那題的做法照樣做就應該會對了，可是這次題目的條件變了一點，原來定理就不適用了。這是很多學生的共通問題，沒有用定理本身去推論，而是模仿類似的經驗。這樣的學習是本末倒置，想要簡單學習結果踢到鐵板。

如何深入學習一個定理呢？新學了一個定理後，也許做過幾個基本運算、標準題，就該開始思考這幾個問題了：

一、**這定理有些什麼條件？有些什麼結論？如何證明？**首先清楚定理的主體，並且考慮一下，這結論是否合理？舉幾個例子試試看。如果條件有很多個，試試看，拿掉一個條件會如何？結論還成立嗎？或是結論會改變成怎樣？這樣

考慮過就不容易誤用定理了。

- 二、**這定理要怎麼用？**也就是定理的結論用來解決什麼樣的問題？或是定理的使用範圍在哪？有什麼限制？這也是很重要的一步，我們必須能在遇見相關的問題時，「主動」想到這個定理，有時也要能盡快發現某個題目不適用。
- 三、**有沒有其他定理與這個定理有相關性？**也就是有沒有其他定理有類似的條件或結論？或是在相同範圍中還有哪些公式。分清楚它們使用時有什麼差異，解題時應該同時想到這一組公式，了解它們的差異才能迅速找到合適的公式。

每個公式都應該從這三個方向仔細考慮。

2-3 實例說明



實例說明 1 二次方程式的公式解（國中）

$$\text{二次方程式 } ax^2 + bx + c = 0 \text{ 的解為 } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}。$$

這是國中一個重要的公式，每一個學生都應該背的很熟，高中時也常會使用。可是學習這個公式不是背了就好，現在我們分析一下：

- 一、這個公式的條件必須是一個二次方程式，結論是求出此方程式的根，證明方法是用配方法解出。以這個公式為例，應該是先會配方法解二次方程式，然後再學公式簡單求解，這樣按部就班的學習，萬一忘了公式，只需麻煩一點用配方法。另外，這個公式就完全符合2-1所說的前兩個條件。因為計算繁瑣才需要公式簡化，因為經常使用才不會忘記。
- 二、這個公式該怎樣用？當然是在解二次方程式的根時用這個公式。如果二次式能夠簡單分解，我們會用十字交乘法分解再求方程式的根。如果無法簡單分解，我們可以用配方法或代公式去求方程式的根，可是配方法計算冗長，而我們又常常需要去解二次方程式，所以有這個公式來縮減計算的過程。另外，有些方程式可以簡化或代換成二次方程式。例如： $\frac{x^2-5}{x}=4$ 或 $x^4-10x^2+9=0$ 。
- 三、至少有兩組公式與這個公式有關：根的判別、根與係數關係。而這兩組公式都是原公式再延伸後的結果，比較一下它們的用法吧。

根的判別：二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的解

(1) 兩相異實數根 $\Leftrightarrow b^2-4ac > 0$

(2) 兩相等實數根 $\Leftrightarrow b^2-4ac = 0$

(3) 沒有實數根 $\Leftrightarrow b^2-4ac < 0$

其中 b^2-4ac 為 $ax^2+bx+c=0$ 判別式。

這個公式的由來就是二次方程式的根的公式，稍微比較一下，一個是求「根等於多少？」，一個是求「根的性質或實根的個數為何？」，使用的時機不同吧。

根與係數關係： $ax^2+bx+c=0$ 的兩根為 α 、 β ，則

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

這個公式可以由二次方程式的根的公式來證明。比較一下，這個公式是求「由兩根 α 、 β 所衍伸出來的算式」，例如： $\alpha^2 + \beta^2$ 、 $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ ，而不是直接求兩根。



實例說明 2 餘弦定理（高中第二冊）

$\triangle ABC$ 三頂點 A 、 B 、 C 的對邊長分別為 a 、 b 、 c ，則會滿足

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A, b^2 = c^2 + a^2 - 2cacos B, c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos A$$

結論也可以寫成 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ， $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ ， $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ 。

這是高中三角函數單元的重要公式，很多高中生都背的很熟，也能套進基本題中解題，可是遇到更深入的思考題時，就無法靈活的使用這個公式了。現在我們深入分析一下：

- 一、公式的條件很單純，就是三角形的邊與角。結論也很單純，就是一個等式 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A$ ，從圖形去記只要記一個式子即可。兩種結論是等價的，可以由一種推到另一種。證明方法很多，三角或解析幾何都能證出。特別當 $A = 90^\circ$ 時， $\cos A = 0$ ，餘弦定理就變成畢氏定理 $a^2 = b^2 + c^2$ 。

二、餘弦定理是三角形的邊角關係式，任何牽扯三角形邊與角的問題就該想到它了。餘弦定理的式子包含三個邊長與一個夾角，也就是**三邊一角關係式**。那麼我可以由三邊去求一角，也可以由二邊一角去求第三邊，甚至已知一邊一角就可以得到另兩邊的一個關係式，或是只知一角就可以得到三邊的一個關係式。看起來有點複雜，其實也可以這樣簡單想：**如果已知與求解合起來有三邊一角，就可以用餘弦定理了。**

三、這個式子屬於三角形邊與角的關係式，有關邊角關係式還有三角形三內角和為 180° 、兩邊和大於第三邊與正弦定理。前兩者大家都能靈活使用，我們考慮一下**正弦定理**： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ，其中 R 為 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑。暫且不考慮 R ，**正弦定理是二邊二角的關係式**，若已知與求解合起來是二邊二角，就該用正弦定理了。這樣綜合正弦定理與餘弦定理就可以解出很多單一三角形的問題了。再深入想想，**當一個三角形有三個邊、角的條件，則這個三角形就會是有限組解**。這裡的「有限」是說通常是恰一組解，有時可能無解或兩解。國中學的三角形全等條件都是三個條件，所以若是已知三個邊或角，就應該能求出其他的邊或角，而正弦定理與餘弦定理就提供我們方法了。



實例說明 3 虛根成對定理（高中第一冊）

$f(x) = 0$ 是一個實係數多項式方程式，若 $f(x) = 0$ 有一虛根 z ，則 \bar{z} 也是 $f(x) = 0$ 的一根。

一、這定理有二個條件， $f(x)$ 必須是一個實係數多項式、 $f(x) = 0$ 有一虛根 z 。結論是 $f(x) = 0$ 也會有一根 \bar{z} ，還有另一個衍生的結論：實係數多項式方程式必定有偶數個虛根。證明方法不難，但有一些繁瑣，課本上都有完整證明。其中「實係數」這個條件很重要，若少了這條件，結論就不成立了。

$$x^2 - (1+i)x + i = 0 \quad (x-1)(x-i) = 0 \quad x = 1, i$$

就是一個反例，因為不是實係數，所以有一根 i ，但沒有共軛複數根 $-i$ 。

二、直接使用很單純：「設 $a, b \in R$ ， $x^2 + ax + b = 0$ 有一根 $2 + 3i$ ，則有一根 $2 - 3i$ 。」是對的用法，「設 $x^2 + ax + b = 0$ 有一根 $2 + 3i$ ，則有一根 $2 - 3i$ 。」就錯了。學習時把條件看清楚，使用時把條件想清楚，就不會誤用了。

三、相關的定理有**代數基本定理**、**實根勘根定理**，每當使用這三個定理中任何一個，就要主動想到另外兩個。當他們彼此交互運用，又能得到很多結論。細節不是本書重點，就不再多闡述了。

如果讀者已經學過這三個公式，看過上面實例，就該了解到如何做才是深入學習一個定理。很多學生公式記的很多也記的很熟，可是自行解題時都用不出來，那不是不懂，而是懂得不夠深入。能夠這樣深入學習定理，才能運用自如。

每個學生大概都有這樣的經驗：考試時遇到怎麼想都想不出來的題目，等到老師講解時才發現，其實一點都不難。解題用的方法自己都知道，公式也都會，只是自己沒有「想到」該如此使用。多半的問題是無法善用自己認得的公式，而不是會的公式太少。



3

如何去記一個公式或定理



數學是理解的科目，重點不是「背」公式，更不是「多」背公式。背的少又背的巧才是正確方向。

記公式也是有技巧的，最忌諱的是「死背」，也就是像背國文課文那樣，利用反覆朗誦或默唸把公式記下來。最快記得公式的方法不一定是死背，而最快忘記公式的方法絕對是死背。死背方式記公式容易忘記，更容易誤用，特別是一些複雜又不常用的公式。數學裡需要死背的公式非常少，只有當公式的推導過程很長，而且沒有簡單的看法，又要經常使用，這樣的公式只好死背。例如九九乘法表，大概每個人當初都是死背起來的，沒有人看過幾遍就「看懂所以就認得了」，但因為經常使用，也不怕會忘記。

有的人（甚至有些老師）覺得多背些公式總比少背好吧，這是很可怕的想法，好像以為亂吃補藥沒關係，其實副作用很可怕的。同樣範圍的學習裡，只記住5個公式的學生會記得很熟，必須想辦法活用這5個公式來解題；去記50個公式的學生會記不熟而誤用，而且會只想套公式，阻礙了思考的能力。



3-1 多半公式不需要死背

請問你數學裡哪一個公式最難背？我覺得九九乘法表最難背。別當我開玩笑，請你想想看，你還學過哪一個公式比九九乘法表更大或更複雜？既然九九乘法表都能背起來，當然其他公式也都能背起來。可是多半學生的問題不是「背不起來」，而是背了又忘了，或是無法正確使用，或是該用的時候想不到它。當然大家都知道原因，其它公式沒有像九九乘法表那樣每天用，所以就需要一些技巧去記公式。

有一次我問學生：「怎樣的公式永遠不會忘記？」等學生想不到好辦法後，我再告訴他們：「沒有背的公式永遠不會忘記。」學生一片譁然，說我在唬爛。可是我是說真的，因為很多公式用對方法就認得了，根本不用背。有些用算就好了，有些想清楚就認得了，有些可以用特例去延伸，有時算熟了就自然記下來了。請問你「 $7+8=?$ 」，再請問你是用「算」的還是「記」的？你以前背過九九「加」法表嗎？你大概算熟了就自然記下來了。如果你仍不相信「算熟了就自然記下來」，我再舉一個國中數學的例子，若你是中上程度的學生，請你做一題因式分解： $x^2 - 5x + 6$ 。

你是否一看就知道 $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ ，你是用算的？還是背的？還是算熟了就自然看出來了。

3-2到3-8是一些例子說明各種記公式的方法，我所列出的方法是讓大家不容易忘記，如果再配合第2節深入了解定理，則這些公式不容易忘記也不容易用錯。死背數學而不去了解的後果很可怕，曾聽說有私立高職的學生竟然不會做分數的加減法，我無法想像他們的情形，可是我確定各位會算「分數加減法」的同學都沒有去死背「分數加減法公式」吧。

3-2 算熟了就自然記下來

對於計算過程不長的公式，最好的辦法就是直接算，也有些公式推導過程稍長，可以用精簡的想法縮短計算步驟，使得可以直接算。不要擔心這樣速度會慢，我們往往在算熟後可以直接看出結果，有時比背的還要快，而且不會弄錯，反而是那種背下來後就不再想原因的同學才會弄錯或忘記。

下面是一組重要的公式，很多學生看我推演一次，就自然記下而且從未忘記，其實我只有教學生用簡單的方法去算出結果，或說是看出結果，而不是記下結果。



實例說明（國中到高中範圍）

國中的一個基本公式： $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

很多學生就這樣背：

「 a 加 b 平方等於 a 平方加 $2ab$ 加 b 平方。」

現在我們看看這個公式的原理：

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

換個方式看看吧：

如右圖，乘出來共有4項，兩條直的實線對應乘出 a^2 與 b^2 ，兩條交叉的虛線對應乘出 $2ab$ 。

這方法是直接算出結果，多算幾遍就自然能記得公式了。

如果能用右上圖「認出」這個公式，就可以不用硬背，還可以有下面的推廣了：

看著下面的圖，你能不能說出 $(a + b + c)^2 = ?$

$$\begin{array}{r} a \quad + \quad b \\ \times \quad | \quad + \quad | \\ a \quad + \quad b \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a \quad + \quad b \quad + \quad c \\ \times \quad | \quad + \quad | \quad + \quad | \\ a \quad + \quad b \quad + \quad c \\ \hline \end{array}$$

乘出來共有 $3 \times 3 = 9$ 項，

先算三條直的實線得到 $a^2 + b^2 + c^2$

三組交叉的虛線對應乘出 $2ab + 2bc + 2ca$

看著上圖，你能不能「看出」：

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

「算出」、「看出」比背起來有用多了，若上兩個例子你都可以用算出來代替背公式，現在你可以進一步想一想 $(a + b + c + d)^2 = ?$

「哇！中間的交叉虛線太多，我已經看不清楚了。」別急，看不清楚是正常的，即使前面的你看清楚了， $(a + b + c + d + e)^2$ 還是很難看清楚吧。

所以我們要有點新想法。重新再看這個圖：

$$\begin{array}{c} a + b + c \\ \times \\ a + b + c \end{array}$$

上下對應相同文字的都乘成平方，係數都是1；上下對應不同文字的都變成交叉虛線，所以係數都是2（有 ab 就有 ba ，變成 $2ab$ ）。

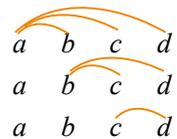
那麼 $(a+b+c+d)^2$ 應該有 $a^2+b^2+c^2+d^2$ 吧，係數是2的會有哪些呢？

任何不同字母相乘的項都該有：

先由 a 往後乘，有 ab, ac, ad

再由 b 往後乘，有 bc, bd

再由 c 往後乘，有 cd



那麼應該有 $2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$ 吧？

請你自己拿一張紙重新算一遍 $(a+b+c+d)^2$ ，注意後半部要依著順序以免遺漏。

如果你也能自己「算出」這個公式，恭喜你，你也可以再看看這個公式的終極版本：

$$(\text{和})^2 = (\text{平方和}) + 2 \times (\text{兩兩相乘之和})$$

你是否也可以「看懂」這個公式？記著，每次用它時，心中都要想一下剛才的圖，你就永遠不會忘記了。

有許多同學看到公式就背，其實很多課本或參考書上的式子不一定是公式，有時只是「整理出來的結論」。我們應該想想為什麼會這樣？自己能夠算出來就好，如果常用，自然算得很快。

我在國中參考書中看到這個：



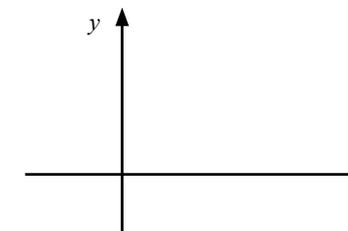
實例說明（國中）

$L: ax + by + c = 0$ 為一直線，

- (1) 當 $a = 0$ 時， L 垂直 y 軸，平行 x 軸。
- (2) 當 $b = 0$ 時， L 垂直 x 軸，平行 y 軸。
- (3) 當 $c = 0$ 時， L 通過原點。

這當然不算是公式，如果用背的，一不小心就會弄混，我們可以循著下面的步驟，逐步的想清楚：

$y = 2$ 是一條直線，利用書上的坐標圖，考慮 y 坐標為2的那些點，畫出 $(0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2), \dots$ ，我們自然看出來它是一條平行 x 軸的水平線，再試試看， $y = 3$ 與 $y = 5$ 也是水平線吧，那我們就發現 $y = k$ 這樣的直線都是水平線了，也可以這樣想，「 y 坐標固定的點



「高度都一樣」，所以是水平線。」

同樣的道理， $x = k$ 這樣的直線都是鉛直線了。

再看上面的規則(1)，當 $a = 0$ 時， L 為 $by + c = 0$ ，也就是 x 項沒有了， L 可變為 $y = -\frac{c}{b}$ ， y 坐標相同的點連成水平線。這是幾何常用的規則，每次都這樣想過，就不可能忘記或記錯了。規則(2)也是一樣道理。

再看上面的規則(3)，當 $c = 0$ 時， L 為 $ax + by = 0$ ，如果用原點 $(0, 0)$ 代入得到 $0 = 0$ 成立，所以 L 必通過原點。

有人擔心這樣推演會不會太慢，放心，多推演幾次就會跟背的一樣快，而且這樣推演是有道理的，所以不會弄錯。還有一個更大的好處，這樣的想法常常可以推廣，例如二次函數 $y = 2x^2 - 5x$ 的圖形也會通過原點，高中學的圓 $x^2 + y^2 + 4x = 0$ 也一樣會通過原點，道理都一樣吧。

在國中與高中數學裡，都有很多這類不需要背的公式，它們計算的過程很短，或者道理很簡單，那麼我們就應該用算的，算熟了比背熟了更有用。有些公式或定理演算過程比較長，可是也可以將過程簡化。



實例說明（高中第一冊）

餘式定理：

多項式 $f(x)$ 除以 $x - a$ 所得的餘式為 $f(a)$ 。

證明：

由除法原理可設

$$f(x) = (x - a)Q(x) + r, \quad r \text{ 為餘式}$$

以 $x = a$ 代入得：

$$f(a) = (a - a)Q(a) + r \Rightarrow f(a) = r$$

所以餘式為 $f(a)$

過程有點長，現在我們把它簡化一下：

A 除以 B 得商 Q 餘 R ，就是 $A = BQ + R$ ，

當 $B = 0$ 代入 $A = BQ + R$ 時，就得到 $A = R$

所以，「當除式等於 0 的 x 代入被除式，就變成餘式了」。這樣記就很簡單而且有道理了。

再看另一個形式的餘式定理：

多項式 $f(x)$ 除以 $ax - b$ 所得的餘式為 $f(\frac{b}{a})$ ，也一樣吧。

有一次我看到學生在背下面的「公式」：

實例說明（高中第二冊）

n 為自然數，

$\log x$ 的首數為 $n \Rightarrow x$ 為 $n+1$ 位數。

$\log x$ 的首數為 $-n \Rightarrow x$ 小數點後第 n 位數開始不為 0。

這當然算不上公式，更不該用背的。簡單想一下，如果 $\log x = n \Rightarrow x = 10^n \Rightarrow x$ 是 1 後面加上 n 個 0，為 $n+1$ 位數；如果 $\log x = -2 \Rightarrow x = 0.01$ ，小數點後第 2 位數開始不為 0。自己想一下就能看清楚，那麼就不要背，多想幾次就不會弄錯，更不用擔心會忘記。

你也能想著原理就寫出公式嗎？如果能夠做得到，請記著，每次使用時都還是要想一下原理，這樣你就永遠不會忘了。



8

學完一個段落——構築解題策略

這一節是本書的重點，前兩節「熟練基本題」與「理解標準題」都是要深化對题目的學習。可是當我們面對那些沒見過或已經忘了的題目，這時就要運用解題策略尋求解題方法。在第 5 節中，我們看的「基本解題策略」都屬於大範圍的解題策略，幾乎在任何單元的數學問題都可能用到。而在數學的各個單元裡，針對單元的特性，就有一些中範圍的解題策略。或是針對某類題目或某種條件、求解，又有一些小範圍的解題策略。這些策略在解題時也需要交互運用。

我們都必須體會解題策略的重要性，尤其是中、小範圍的解題策略，每個同學要學習自己建立解題策略。經由自己的歸納與思考，再不斷修正、擴充，這樣體會出自己的解題策略，才是自己不會忘記的，也保證能夠靈活運用的。

沒有完美的解題策略，也無法保證解出所有題目，但不斷改進解題策略，才能有更強的解題能力。運用解題策略可以讓自己憑數學能力解題，不需要去記解法，而是有能力去解，也可以解出很多沒見過的題目。最重要的是，這樣才能真正享受解數學的樂趣。



8-1 小範圍的解題策略

小範圍的解題策略（以後簡稱小策略）是針對某一個特定的條件、求解或特殊格式所必須主動去想到的方向。其實每個學生在做過一些題目後都會自動產生這種感覺，例如題目要求一個圓的面積，大家都會想到先去找半徑，這就是解題策略。而這些策略的道理都很明顯，也不會記錯。不同學生心中的解題策略的多寡不一，程度好的學生遇見難題，心中會有很多想法，會去嘗試各種可能方向。程度差的學生遇到沒見過的題目，心中一片空白，完全不知道該如何去想。這無關學生的聰明才智，而是平常學習時，能否將學過的東西轉化成具體的解題策略。

小策略主要有三種來源。

一、學完一個定義、公式或定理，如果能像本書所說方式去探討，就可以發現一些小策略，例如：

「多項式除以一次式的餘式可以用餘式定理」（高中第一冊），學完餘式定理，當然看到餘式就該想到它。仔細看過定理，還要加上使用時機：除式必須一次式。

「極值問題看到平方和，則優先考慮柯西不等式」（高中第三冊），極值問題通常由不等式求出，方法很多，而柯西不等式是：「 a, b, x, y 為實數，則 $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ 」。公式裡就有兩個「平方和」，那麼看到平方和自然優先考慮它。

二、做過幾個類似的題目後，想一想他們有什麼共同做法？這做法與題目的條件有什麼關聯？再想一想這背後的原因，就會感覺到一些小範圍的解題策略，例如：

「看見分數（或分式）就要想到約分、通分」（國中），這是標準的化簡方式，通常先考慮約分，再先考慮通分。

「四邊形的問題可以作對角線切成兩個三角形」（高中第二冊），四邊形本身的性質如果不好用，就該考慮割成兩個三角形，這樣我們就多了很多三角形的定理和公式可用了。

「看見 $(\log x)^2$ 要設 $t = \log x$ 」（高中第二冊），為什麼總是這樣做？只要檢查一遍對數律，就會發現對數律完全無法處理 $(\log x)^2, (\log x)^3, \dots$ 這種式子，所以就該往代換方向去做了。

「看見圓與直線相切要想到圓心與直線距離等於半徑」（國中、高中第三冊），這其實也是一個充要條件，也是將敘述的條件改成數學等式，做幾題切線題目就可能注意到。

三、當然我們也會從別人（老師或同學）聽到一些想法，這時自己就要想一想原因，或有沒有其他的例子。想清楚再記下來，可是也許又會忘記。沒關係，只要我們做題時都會深入去理解做法，常用的解題策略會不斷重複出現，不斷提醒我們。直到有一次，我們主動想到這個解題策略，又因此找到解法，才算真正學會了。

8-2 解題策略實例1：餘弦定理

看一看餘弦定理：「 $\triangle ABC$ 三個角 A, B, C 對應邊長 a, b, c ，則 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A$ 」，我們就該發現這個小策略：「题目的已知與求解恰有一個三角形的三邊一角，則可用餘弦定理」，因為公式中就是三邊一角。只要認得餘弦定理是「三邊一角關

係式」，再學會靈活用即可。如果不太清楚，請參閱2-3對餘弦定理的解說。

下面的實例，第1題是基本計算，第2、3題是標準題，不過第3題已有思考題的難度，讀者可以試著只利用餘弦定理與解題策略去算算看。

實例說明（高中第二冊）

設 $\triangle ABC$ 之中， A 、 B 、 C 的對邊長依序為 a 、 b 、 c ，若 $\angle A = 60^\circ$ ， $b = 5$ ， $c = 8$ ，則 $a = ?$

分析：

1. 题目的已知與求解 a 、 b 、 c 與 A 恰為三邊一角，那麼想到餘弦定理，代進去試試。
2. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \cos 60^\circ$
 $= 25 + 64 - 40 = 49 \Rightarrow a = 7$

實例說明（高中第二冊）

x 、 y 為正實數，試求以 x 、 y 、 $\sqrt{x^2 + xy + y^2}$ 為三邊長的三角形的最大角。

分析：

1. 题目的已知與求解恰為三邊一角，所以想到餘弦定理。
2. 沒有關係式可以解 x 、 y ，只能直接代入餘弦定理。
3. 最大邊的對角是最大角，顯然最大邊是 $\sqrt{x^2 + xy + y^2}$ 。
4. 設最大角是 θ ，則

$$\cos \theta = \frac{x^2 + y^2 - (\sqrt{x^2 + xy + y^2})^2}{2xy} = \frac{-xy}{2xy} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = 120^\circ \text{ (剛好 } x、y \text{ 消去了，題目早設計好了。)}$$

實例說明（高中第二冊）

設 $\triangle ABC$ 之中， A 、 B 、 C 的對邊長依序為 a 、 b 、 c ，若滿足 $(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$ ，則 $\angle C = ?$

分析：

1. 题目的已知與求解為 a 、 b 、 c 、 C ，恰為三邊一角，當然想到餘弦定理。
2. 只有一個條件式 $(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$ ，無法解出三個未知數。應該先將求解看成 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ ，想辦法用條件式直接代入。
3. $(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$ 與 $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ 有什麼好關係呢？試著乘開 $(a + b + c)(a + b - c) = 3ab \Rightarrow (a + b)^2 - c^2 = 3ab \Rightarrow a^2 - ab + b^2 - c^2 = 0$

4. 再比較一下 $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ 就很明顯了：

$$a^2 - ab + b^2 - c^2 = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = ab$$

$$\text{代入 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2}, \text{ 則 } \angle C = 60^\circ$$

看過這三個例子就能稍微體會解題策略的功能了，很多學生學數學時去記題型，做過題目就記得「已知三邊求一角」、「已知兩邊一角求第三邊」、……。這樣學很辛苦又沒效率，可是簡單的小策略可以幫助我們打開視野，不但能做見過的題目，更能舉一反三。

同樣的道理，正弦定理是：

$$\triangle ABC \text{ 三角 } A, B, C \text{ 對應邊長 } a, b, c, \text{ 則 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

其中 R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑

我們對於定理的前半部分 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 也可以發現一個小策略：「題目的已知與求解恰為一個三角形的二邊二角，則可用正弦定理」，用法也類似。如果去記「已知一邊兩角求另一邊」、「已知兩邊一角求另一角」、……，繁瑣而且不動腦筋，效果就差了。



實例說明（高中第二冊）

設 $\triangle ABC$ 之中， A, B, C 的對邊長依序為 a, b, c ，若已知 $b = 8, c = 5, \angle B = 2\angle C$ ，則 $\cos \angle A = ?$

分析：

1. 题目的已知與求解為 b, c, A, B, C ，為二邊三角，所以應該用正弦定理。
2. $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{8}{\sin 2C} = \frac{5}{\sin C} \Rightarrow 5 \sin 2C = 8 \sin C$
3. 看到不同角 $2C, C$ 要化成相同角。（這也是重要策略）
 $5 \sin 2C = 8 \sin C \Rightarrow 10 \sin C \cos C = 8 \sin C$
 $\Rightarrow \cos C = \frac{4}{5}$ （因為 $\sin C \neq 0$ ）
4. 利用 A 與 C 的關係： $A = 180^\circ - B - C = 180^\circ - 3C$ ，
 $\cos A = \cos(180^\circ - 3C) = -\cos 3C$
 $= -(4\cos^3 C - 3\cos C) = -[4(\frac{4}{5})^3 - 3(\frac{4}{5})] = \frac{44}{125}$

策略給我們解題的方向，實際解題時仍要正確考慮解法的正確性，很精確的執行每一步。

8-3 中範圍的解題策略

中範圍的解題策略（以後簡稱中策略）可能是幾個相近的小策略再組合起來的，所以適用範圍更大，包括一堆條件、求解類似的題目。相對的，中策略會包含幾個可用的工具（公式、定理），也有幾個可能的解題方向，這時最重要的是要包括不同條件或求解對於選擇工具或方向的指引。

現在我們將前一節的兩個小策略，加上國中學過的一些性質組合成一個中策略，我稱為「解三角形的解題策略」。所謂「解三角形」是已知一個三角形的若干邊長或角，求解是其他邊長或角。

1. 一般 $\triangle ABC$ 的邊與角滿足 $A + B + C = 180^\circ$ 、正弦定理、餘弦定理、任兩邊和大於第三邊。
2. 任一個三角形已知三個邊、角（或三條件），則可解出這個其它邊角，但已知三角只算兩個條件。
3. 將已知與求解的邊、角一起考慮，若為二邊二角則用正弦定理，若為三邊一角則用餘弦定理做成方程式。

這個策略看起來有點複雜，其實重點只在第2項，將兩個小策略整合成較大範圍的解題策略。第1項是界定可用的工具，第3項只是原本的兩個小策略的比較而已。只要熟悉這個策略和第5節的基本解題策略，幾乎就可以解決所有這一範圍的所有題目了。下面是一個困難的思考題，能考倒很多中上程度的學生。



實例說明（高中第二冊）

設 $\triangle ABC$ 之中， A 、 B 、 C 的對邊長依序為 a 、 b 、 c ，若已知 $a = 10$ ， $b = c + 4$ ， $B = 2C$ ，則 $c = ?$

分析：

1. 條件與求解都是 $\triangle ABC$ 的邊與角，恰有三個條件。
2. 求解與兩個條件是邊的式子，怎樣把 $B = 2C$ 也變成邊的關係式？能同時用到 B 、 C 的公式就是正弦定理了。
3.
$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{b}{\sin 2C} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{b}{2\sin C \cos C} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \cos C = \frac{b}{2c}$$
，再將 C 變成邊的關係，利用餘弦定理：

$$\cos C = \frac{b}{2c} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Rightarrow ab^2 = c(a^2 + b^2 - c^2)$$
4. 將 $a = 10$ ， $b = c + 4$ 代入消去 a 、 b 就可得 c 的方程式。

$$ab^2 = c(a^2 + b^2 - c^2) \quad 10(c + 4)^2 = c[100 + (c + 4)^2 - c^2]$$

$$\Rightarrow 10c^2 + 80c + 160 = c(8c + 116)$$

$$\Rightarrow c^2 - 18c + 80 = 0$$

$$\Rightarrow c = 10 \text{ 或 } 8$$
5. c 有兩組解，該檢查一下， $c = 10$ 時不合，所以 $c = 8$ 。

形成中策略的另一個方式是：從一群題目中歸納，當我們學完一個段落的基本計算與標準題，或許也做過一些思考題後，就可以試著建立共同的解題策略，先靜下來想幾個問題：

- 一、**這一部分大致有些哪些題目？**這些題目有什麼共通性？有什麼條件？有什麼求解？這些條件、求解常常如何使用？將來在一堆混合的題目裡，怎樣發現是這一類題目？

- 二、**在解決這些題目時，會用到哪些工具（定義、公式、定理）？**什麼樣的條件或求解下，會用到什麼工具？如果用到多種不同的工具，能不能找出它們使用上的差異？或是各種工具的使用時機。
- 三、**在解決這些題目時，有沒有用到什麼共通的結構？**也就是有沒有什麼共同的模式可以依循？

將這些問題想一想，就會有一些小結論，而且是我們自己得到的結論，而這時候我們所學的一堆個別的題目才會開始融合成具體的觀念。接下來你可以做更多的變化題了，看到類似的條件或求解，也許運用你自己的策略就可以解出你從未見過的題目，享受一下那種成就感吧！當然也可能你還是解不出來，最後看看解答再想一想，自己的解題策略是不是可以再擴大或修改一些？有時也會發現其實自己的策略能用，只是沒想到也能這樣用。當我們不斷接觸新的題目，加入新的策略，或更活用原有的策略，我們的解題能力也越來越強，對自己策略的信心也越來越強。

{ 以上內容，摘自本書第三章 }

《如何學好中學數學——觀念數學 1》 未演先轟動！

北一女學生 師大數學系 北一女中 台大數學系 中央大學數學系 高雄大學應用數學系 北一女學生
林蚊囊 洪萬生教授 翁錫伍老師 張海潮教授 單維彰教授 游森棚副教授 蘇意涵

聯合推薦 依姓氏筆畫排序

本書出自第一線教師的現身說法，重點圍繞在數學思維與解題策略，內容極為豐富有用。至於在書寫風格上，作者則排除理論而直接訴諸實例，表現了樸拙的意義與價值。這是難得一見的一本中學數學學習指南，非常值得推薦。

——師大數學系 **洪萬生** 教授

讀了任老師寫的這本書之後，相信你會發現數學一點都不困難，解題充滿樂趣，並且信心滿滿。

——台大數學系 **張海潮** 教授

對於每一種我知道或者能想像的數學學習困難，任老師都有專業的評析與建議；而且他通常用慧黠的方式說出來。如果拿起這本書的是學生家長，可以先翻閱第四章。

——中央大學數學系 **單維彰** 教授

「從基本開始，吃透範例，看穿結構，課本算十遍」，這是在建中任教時對學生的耳提面命。但是「基本觀念徹底釐清，理解公式的來由和步驟的推導，基礎穩固後自然觸類旁通」，卻是一知半解與追求速成的台灣學生最忽略的。很高興有這樣的一本書，告訴學生如何學數學才是正確的，希望這本書能夠導正錯誤的數學學習。

——高雄大學應用數學系 **游森棚** 副教授
(曾任建國中學數理資優班教師)

想要學好數學先要喜歡數學，本書讓我們知道數學學習的關鍵，了解數學各單元是怎麼彼此連接，使我們面對數學時，不再那麼害怕，甚至喜歡上它，可以在最短的時間內，學到數學的本質與內涵。

——北一女中 **翁錫伍** 老師

像一面能養顏美容的鏡子，直接地反映了學生學習數學的問題，並提出了精確的解決之道。

——北一女學生 **林蚊囊**
(98學測滿級分)

讓數學從此帶給你煥然一新而欣喜的感動。

——北一女學生 **蘇意涵**
(英特爾國際科展「傑出青年科學家獎」)

天下文化科學天地暢銷榜 TOP50

標註*者為特別推薦，請見右頁「滿分書房必備」

* 1	WS003	統計，讓數字說話!	300 元	26	WS085	觀念化學I 基本概念·原子	400 元
2	WS018	微積分之旅	280 元	27	WS086	觀念化學II 化學鍵·分子	400 元
3	WS020	毛起來說三角	250 元	28	WS087	觀念化學III 化學反應	400 元
4	WS021	毛起來說 e	250 元	29	WS088	觀念化學IV 生活中的化學	400 元
5	WS036	觀念生物學(1)	400 元	30	WS089	觀念化學V 環境化學	400 元
6	WS037	觀念生物學(2)	400 元	*31	WS093	你不能不懂的統計常識	180 元
7	WS041	DNA的十四堂課	330 元	32	WS097	數學嗶聲班(基礎班)	260 元
* 8	WS042	微積分之屠龍寶刀	320 元	*33	WS099	蘇老師生活化學快問妙答	300 元
* 9	WS043	微積分之倚天寶劍	360 元	34	WS100	大腦開竅手冊	299 元
10	WS046	看漫畫，學物理	300 元	*35	WS107	從旅遊，學數學	230 元
11	WS048	看漫畫，學統計	300 元	*36	WS108	從月曆，學數學	220 元
12	WS053	現代化學I	340 元	*37	WS109	從生活，學數學	280 元
13	WS054	現代化學II	380 元	*38	WS110	從天文地理，學數學	240 元
14	WS055	3D理化遊樂場I	460 元	39	WS201	觀念物理I	380 元
15	WS056	3D理化遊樂場II	460 元	40	WS202	觀念物理II	380 元
*16	WS058	蘇老師辦化學	380 元	41	WS203	觀念物理III	380 元
*17	WS062	蘇老師化學黑白講	340 元	42	WS204	觀念物理IV	380 元
*18	WS064	蘇老師化學五四三	330 元	43	WS205	觀念物理V	380 元
*19	WS068	蘇老師化學聊是非	350 元	44	WS206	觀念物理VI-習題解答	450 元
*20	WS069	別讓統計數字騙了你	240 元	45	WS1003	萬物簡史1	380 元
21	WS071	觀念生物學(3)	320 元	46	WS1004	萬物簡史2	380 元
22	WS072	觀念生物學(4)	320 元	47	WS1005	萬物簡史3	380 元
23	WS076	搞笑學物理	330 元	48	WS1006	萬物簡史4	380 元
24	WS081	睡夢中，學三角	300 元	49	WS2001	跳出思路的陷阱	160 元
25	WS082	怎樣解題	280 元	50	WS2021	一生受用的公式	180 元

科學達人看這裡!

滿分書房必備

統計必勝三書

統計方法已普遍應用於一般日常生活、工商管理、科學研究、市場調查中，透過專家指引，看似艱難的統計，也能輕鬆掌握！



微積分秘笈二書

想換一種方式，理解令人頭疼的微積分嗎？本書三位作者使出搞笑講解的本事，用放洗澡水、切檸檬派、雙人劍法等生活例子，引導你探究微積分的理論與實用，有效學習微積分。



蘇老師化學五書

做實驗、找證據，解開生活中各種五四三的化學問題，跟著蘇老師探索生活化學，所有疑惑都能迎刃而解，懂一點化學真不錯！



曹老師數學四書

為什麼要學數學？我們生活裡用得到這麼多數學嗎？如果你有這些疑問，不妨來到曹老師的生活數學教室，讓曹老師帶你體驗一趟數學通識之旅。



★ 作者曹亮吉為第一屆吳大猷科學普及著作創作類銀籤獎得主