序言

這篇序言將表達我個人的一些想法, 也是讓我來講線性代數可以如何教與學的機會。假如我們用純粹抽象的或者像食譜般的教學方式, 我們都會失去準頭。本課程經過長時間的發展, 希望能達到我們期望的目標。

有一些與本課程相關的網頁, 應該會對學習者有相當的助益。我們得到很多建議與鼓勵的回饋, 我希望教授與學生自由地來使用這些材料。你可以直接連上 **web.mit.edu/18.06/www**, 麻省理工學院每學期開的線性代數課程, 也會不斷更新這個網站的內容。在開放課程網站 **ocw.mit.edu** 裡也掛有線性代數一科, 那裡的特色是包含了課程講授的實況錄影 (當然你沒有必要非看不行 . . .)。我可以大概講一下目前網頁裡包含哪些項目:

1. 課程時間表, 最新作業, 考題及其解答。

2. 課程的目標與概念性的問題。

3. 有關固有值、最小平方法及其他課題的 Java 示範程式。

4. 固有值與固有向量訊息的表列 (請參見第六章末)。

5. **詞彙**: 線性代數的小辭典。

6. 線性代數教學程式與 MATLAB 問題。

7. 整個課程實地教學時的錄影。

這些網頁是要爲全世界的教授與學生提供教學所需的支援資料, 我的用意是想傾囊相授, 使得這本書能發揮最大的效用。

在序言之後, 我們就要讓書本自己來說話了。你馬上看得出本書精神所在, 我們的目的是要顯示出線性代數的美麗與價值。我們所強調的是在於理解 — *我將致力於解釋而不只是在演繹*。本書討論的是眞實的數學, 而不是在搞作不完的單調練習。我會不斷地推出實例(建構矩陣, 找出零空間, 額外加一行, 觀察所發生的變化, **尋求協助**!)。教科書必須要能夠協助教導學生獲得眞正所需。所花的氣力絕對會有回報, 而且所幸我們的主題*並沒有過度困難*。

新版的特色

本版中最大的改變, 是我們每一節都增加了許多附帶解答的例題。它們的目的是要把課文直接與習題關連起來。向量方程 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的通解是 $\boldsymbol{x}_{\text{特定解}} + \boldsymbol{x}_{\text{零空間}}$ — 我盡可能地解釋清楚解方程的步驟。附帶解答的例題 **3.4 A** 把這種解釋轉化爲實際執行的每一步驟(從檢驗是否有解開始)。我希望這些模範例題能幫我們把每一節的內容看得更清楚。(有關行列式的例子請見 **5.1 A** 與 **5.2 B**)。"巴斯卡矩陣" 是把美妙的巴斯卡三角與線性代數連起來的漂亮環節。

本版包含了各種各類的新習題 — 有更多的基本演練, 科學、工程、與管理方面的應用, 或者純粹就是在矩陣裡找樂趣。西北塊與東南塊的矩陣溜進了習題 2.4.39。搜尋引擎 *Google* 出現在第 6 章。請看看第 1.1 最後一個習題。我希望習題是本書的強項 — 最新的習題是有關六個 3×3 的排列矩陣: 它們的行列式、樞軸元、跡數、與固有值都是什麼?

在本書或網站上, **詞彙**都是新加進去的部分, 我相信學生會覺得它很有用。除了將線性代數裡重要名詞予以定義之外, 它也提供了快速查詢關鍵事實的機會。

令人高興的是, 現在大家廣泛地知道有使用線性代數的需求。*線性代數絕對與微積分有同等的重要性*。每當我看到數學是如何被應用時, 我都不必有一絲的謙讓。在網頁上, 我還掛了一篇輕鬆的文章, 叫做 "*太多微積分了*"。資料的世紀已經來臨! 有太多的應用使用到離散數學而非連續數學, 使用到數位方法而非類比方法。眞實的狀況是向量與矩陣已經成爲必須會講的語言了。

線性代數課程

方程 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 即刻會使用到那種語言。矩陣 A 乘向量 $\boldsymbol{x}$ 就是 A *的行向量的線性組合*。方程所要找的就是**會產生出 $\boldsymbol{b}$ 的各行之間的線性組合**。我們可以從三個層次得到解, 而且所有層次都很重要:

1. **直接解法**使用前向消去與倒回代入。
2. **矩陣解法**使用逆矩陣得出 $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$。
3. **向量空間解法**察看 A 的行空間與零空間。

另外還有一種可能性: $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *也許沒有解*。消去法有可能導致 $0 = 1$, 矩陣解法有可能找不出 A^{-1}, 向量空間解法有可能尋遍所有行向量的線性組合 $A\boldsymbol{x}$, 但是 $\boldsymbol{b}$ 卻落在行空間之外。數學裡有一部份的工作就是要瞭解什麼時候 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解, 以及假如無解時該怎麼辦 (在第四章裡最小平方解用到 $A^{\mathrm{T}}A$)。

還有一個任務是要學會把向量圖像化。具有兩個分量的向量 $\boldsymbol{v}$ 不會有困難, 它的分量 v_1 與 v_2 告訴我們水平與垂直方向各該走多遠 — 我們畫一個箭頭就好了。第二個向量 $\boldsymbol{w}$ 可能會垂直於 $\boldsymbol{v}$(第一章將告訴我們什麼時候會垂直)。假如那些向量有六個分量, 我們就不可能把它們畫出來了, 不過我們的想像力仍然會去嘗試。在六維空間裡, 我們還是可以快速地檢驗夾角是不是直角。我們不難把 $2\boldsymbol{v}$ (走兩倍遠) 與 $-\boldsymbol{w}$ (與 $\boldsymbol{w}$ 反向) 圖像化, 我們幾乎也能想像出如 $2\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$ 的組合。

最重要的是我們應該努力想像**所有的線性組合** $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$, 它們在六維空間裡填滿了一個 “二維平面”。我雖然這麼寫, 但是不能完全確定我能看得見這個子空間。線性代數可以很容易地與任何大小的向量與矩陣打交道。假如我們在六條邊線上加上電流, 或者給出六種產品的價格, 或者只是一架飛機的位置與速度, 我們都是在處理六維空間的事。對於影像處理或網路搜尋 (或者人類基因體) 而言, 六就有可能改變到一百萬。不過一切還是線性代數, 線性組合仍然是關鍵所在。

教科書的架構

從這篇序言你就可以看出本書的風格與目標, 風格雖然是娓娓道來的方式, 然而目標卻是絕對地正經。線性代數是了不起的數學, 我當然希望教這門課的教授也會學到一些新東西, 至少我自己總是會學到新東西。學生將會注意到應用是如何強化了對概念的理解。我也希望你將會看出本書開展的方式, *既是漸進的也是穩定的*。

有關本書內容的組織方式, 我有六點說明:

1. 第一章提供向量與點積的簡要介紹。假如班上同學曾經接觸過這些題材, 那麼課程可以從第二章開始。那一章在解 $n\times n$ 系統 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, 並且爲整個課程做好準備工作。

2. 我現在比從前更常使用*既約列階梯形式*。套裝軟體 MATLAB 的指令 rref(A) 會產生列空間與行空間的基底。更好的地方是經由化簡合併的矩陣 $\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}$, 我們能得到四個基本子空間的完全訊息。

3. 那四個子空間是學習線性獨立、基底、與維數的最佳途徑。它們觸及矩陣的核心, 也是通往應用的金鑰匙。我不喜歡杜撰一些向量空間, 因爲許多重要的向量空間根本會來得很自然。假如班上能看到豐富的例子, 那麼線性獨立幾乎一講就明白了: 當 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的唯一解時, 矩陣 A 的各個行向量是獨立的。

4. 第 6.1 節引進 **$\boldsymbol{2\times 2}$ 矩陣**的固有值。許多課程希望能及早看到固有值。我們絕對有可能從第三章直接跳到第 6.1 節。要算 2×2 矩陣的行列式並不難, 而網站上的 Eigshow 使用圖像捕捉到當 $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ 的一剎那。

5. 從第一章到第七章, 每一節的末尾都有一段特別標出的**關鍵概念複習**。讀者仔細看過這段複習之後, 可以再次把要點掌握好。

6. 第八章 (*應用*) 增加新的一節, 是關於**工程裡的矩陣**。

當使用電腦軟體的時機成熟後, 我看出兩類可做的事。一類是馬上可以用來檢驗線性獨立, 作格蘭–施密特正交化, 以及解 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 與 $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$。我們的教學程式完全依循課堂上所講述的步驟進行 — 套裝軟體 MATLAB 與 Maple 與 Mathematica 在計算方式上稍有差異, 它們都可以與本書同時使用 (*但決非必須使用*)。另外一類是在較大的問題上作實驗 — 像是尋找元素爲 ± 1 的矩陣的最大行列式, 或者樞軸元的平均大小。我們可以用 tic; inv(A) $*$ b; toc 來量度計算 A^{-1} 的時間。選擇 A = rand(1000) 並與直接消去法的 tic; A/ b; toc 相比較。

穩定前進的一學期課程能夠講到固有值。關鍵的概念是利用矩陣 A 的固有值矩陣 S 把 A 對角化。如果這件事辦成的話, 固有值就會出現在 $S^{-1}AS$ 裡面。對於對稱矩陣而言, 我們可以選擇 $S^{-1}=S^{\mathrm{T}}$。當 A 是長方形時, 我們需要 $U^{\mathrm{T}}AV$ (U 來自 AA^{T} 的固有向量, 而 V 來自 $A^{\mathrm{T}}A$)。第一章到第六章是基本線性代數的核心 — *理論加上應用*。這門學問的美麗之處, 就在於兩者攜手並進的方式。

最後我要傳達一個想法給教授們。你可能會覺得方向是正確的, 但是懷疑你的學生也許還沒有就緒。**不妨給他們一次機會**! 曾經有上千的學生寫信給我, 通常會給我建議, 但是有出人意料的多數表示感謝。當一門課有明確的目標時, 學生是會知道的, 因爲教授與課本都會爲他們著想。線性代數是一門美妙的課程, 請好好享用吧!