1

向量入門

線性代數的核心只是兩種運算, 並且都是操作向量的運算。我們把兩個向量加在一起得到 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$, 用數字 c 與 d 乘它們得到 $c\boldsymbol{v}$ 與 $d\boldsymbol{w}$。再把兩種運算結合在一起, 就是把 $c\boldsymbol{v}$ 與 $d\boldsymbol{w}$ 加到一起, 便得到它們的*線性組合* $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$。

線性組合在這門課程裡是最要緊的觀念! 有時候我們需要一組特定的組合, 對於特別選出來的 c 與 d, 產生所需要的 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$。又有些時候我們想看到 (從變化 c 與 d 而來的) *所有的組合*。所有具有 $c\boldsymbol{v}$ 形式的向量會排成一條線, 所有具有 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$ 形式的向量通常會填滿二維空間的平面。(我必須說是 "二維" 的平面, 因爲線性代數裡允許出現高維空間的平面。) 在四維空間裡四個向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{z}$ 的組合極可能充滿整個空間。

第一章要解釋這些核心的觀念, 所有的東西都將建立在這些觀念之上。我們先從二維與三維的向量入手, 因爲它們比較好畫出來。之後, 我們將進入更高維的空間。線性代數最令人印象深刻的特徵, 就是它能讓我們很平順的跨入 n 維空間。即使畫不出來十維空間的向量, 你對它的想像圖像仍然可以是完全正確的。

本書正是要往 n 維空間進軍, 而第 1.1 節與第 1.2 節的運算幫我們走出開頭的幾步。

1.1 **向量加法 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 與線性組合 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$。**

1.2 **點積 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$ 與長度 $\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}$。**

1.1 向量與線性組合

"你不能把蘋果跟橘子加到一起。" 從某種觀點來看, 就是爲了想要做這種事我們才需要向量! 假如我們把蘋果的數目與橘子的數目分別列出, 我們就有一對數字。那一對數字就是一個**二維向量 $\boldsymbol{v}$**, 它的 "分量" 是 v_1 與 v_2:

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} v_1 &= \text{蘋果的數目}, \\ v_2 &= \text{橘子的數目}。\end{aligned}$$

我們把 $\boldsymbol{v}$ 寫成一個**行向量**。目前的要點是把一對數字 v_1 與 v_2, 用一個 (**粗黑體的**) 字母 $\boldsymbol{v}$ 來代表。

即使我們不把 v_1 與 v_2 加到一處, 我們也可以*加向量*。$\boldsymbol{v}$ 與 $\boldsymbol{w}$ 的第一個分量與第二個分量將會分開處理:

向量加法 $$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \text{與} \quad \boldsymbol{w}=\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad \text{加成} \quad \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix} v_1+w_1 \\ v_2+w_2 \end{bmatrix}。$$

你看出道理了吧。我們還是要把蘋果加到蘋果上。向量的減法使用同樣的觀念: $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$ 的分量是 v_1-w_1 與 ____ 。

另外一個基本運算是*純量乘法*。向量可以用 2 或者 -1 或者任何一個數 c 來乘。有兩種方法把一個向量加倍, 一種是用加法 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}$, 另一種 (更常用的) 方法是把每一個分量乘上 2:

純量乘法 $$2\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} 2v_1 \\ 2v_2 \end{bmatrix} \quad \text{與} \quad -\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{bmatrix}。$$

向量 $c\boldsymbol{v}$ 的分量是 cv_1 與 cv_2。數目 c 稱爲 “純量” 。

注意 $-\boldsymbol{v}$ 與 $\boldsymbol{v}$ 的和是零向量 $\mathbf{0}$, 它與數目零是不相同的! 零向量 $\mathbf{0}$ 的分量是 0 與 0。原諒我慢慢模糊掉向量跟它的分量之間的分際。線性代數就是建立在**向量加法** $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 與**純量乘法** $c\boldsymbol{v}$ 這些運算之上的。

加法的次序倒是沒什麼關係: $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 等於 $\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}$。我們用代數來驗算一下: 第一個分量是 v_1+w_1, 那是等於 w_1+v_1。再用例子來驗算:

$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}。$$

線性組合

把向量加法與純量乘法結合起來, 我們就可以作出 $\boldsymbol{v}$ 與 $\boldsymbol{w}$ 的*線性組合*。先用 c 乘 $\boldsymbol{v}$, 再用 d 乘 $\boldsymbol{w}$, 最後把它們加起來得到 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$。

定義 $c\boldsymbol{v}$ **與** $d\boldsymbol{w}$ **的和稱為** $\boldsymbol{v}$ **與** $\boldsymbol{w}$ **的**線性組合。

有四種特殊的線性組合, 分別是和、差、零、純量積 $c\boldsymbol{v}$:

$$\begin{aligned} 1\boldsymbol{v}+1\boldsymbol{w} &= \text{圖 1.1 中向量的和} \\ 1\boldsymbol{v}-1\boldsymbol{w} &= \text{圖 1.1 中向量的差} \\ 0\boldsymbol{v}+0\boldsymbol{w} &= \textbf{零向量} \\ c\boldsymbol{v}+0\boldsymbol{w} &= \text{與 } \boldsymbol{v} \text{ 同方向的向量 } c\boldsymbol{v} \end{aligned}$$

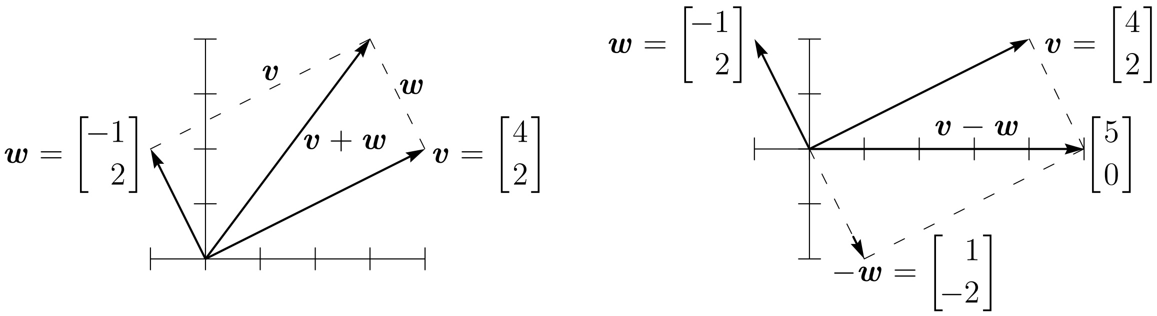
我們總是有可能組合出零向量, 只要把係數都設定爲零就可以了。每當我們看到由向量構成的 “空間” 時, 其中必然會有零向量。這種考慮所有 $\boldsymbol{v}$ 與 $\boldsymbol{w}$ 的組合的宏觀看法, 才使得我們的理論更爲有用。

我們可以用圖形來看向量的性質。對於代數運算而言, 我們只需要用到分量 (例如 4 與 2)。在平面上, 向量 $\boldsymbol{v}$ 可以用一個箭頭來表示。箭頭向右走 $v_1 = 4$ 單位, 再向上走 $v_2 = 2$ 單位。箭頭指到的點其 x, y 座標分別為 4 與 2。這個點也是向量的另外一種表示法 — 我們因而有三種描述 $\boldsymbol{v}$ 的方法, 用箭頭、用點、或者用一對數。

如果使用箭頭, 你可以看出來該怎麼畫和向量 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$:

向量加法(從箭尾到箭尖)　　在 $\boldsymbol{v}$ 的箭尖處放上 $\boldsymbol{w}$ 的箭尾。

我們先沿著 $\boldsymbol{v}$ 走, 再沿著 $\boldsymbol{w}$ 走。或者我們可以直接走 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 的捷徑。我們也可以先沿著 $\boldsymbol{w}$ 走, 再沿著 $\boldsymbol{v}$ 走。這些都是沿著平行四邊形 (本例中剛好是矩形) 殊途同歸的走法。圖 1.1 的端點就是對角線 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$, 也恰好是對角線 $\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}$。



$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v}-\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

圖 1.1: 向量加法 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 產生平行四邊形的對角線。右邊的線性組合是 $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$。

零向量的分量是 $v_1 = 0$ 與 $v_2 = 0$。因為零向量太短, 以致我們沒法畫出一個箭頭來, 可是你知道 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}$。至於 $2\boldsymbol{v}$ 呢, 我們就把箭頭長度加倍。而要得到 $-\boldsymbol{v}$, 只需把箭頭倒轉過來。圖 1.1 中的減法, 就是用了這種倒轉箭頭的方法。

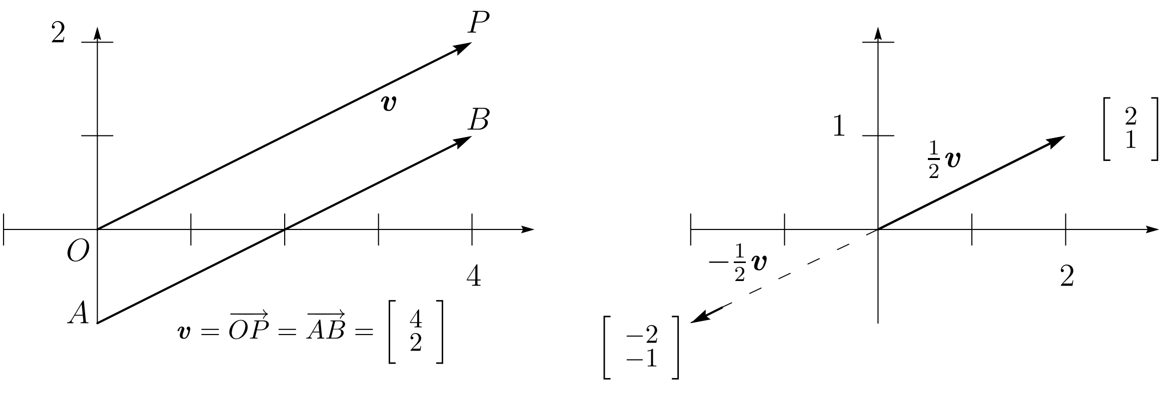


圖 1.2: 箭頭通常由原點 $(0,0)$ 開始; $c\boldsymbol{v}$ 總是與 $\boldsymbol{v}$ 平行。

三維空間裡的向量

擁有兩個分量的向量對應於 xy 平面上的一個點。向量 $\boldsymbol{v}$ 的兩個分量是該點的兩個座標: $x = v_1$ 與 $y = v_2$。表示向量的箭頭從 $(0,0)$ 出發到達這一點 (v_1, v_2)。現在我們允許向量有三個分量, (v_1, v_2, v_3), 並且用三維空間來取代 xy 平面。

以下是幾個一般的向量 (還是行向量, 不過有三個分量):

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}。$$

現在向量 $\boldsymbol{v}$ 對應於一個三維空間的箭頭。通常箭頭從原點出發, 該處是 xyz 軸的交會處, 而其座標是 $(0,0,0)$。箭頭指到的點擁有的座標是 v_1, v_2, v_3。在**行向量**與**從原點出發的箭頭**之間, 以及**行向量**與**箭頭指到的點**之間, 都有完全的對應。

$$\textbf{從現在開始} \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \textbf{也寫成} \quad \boldsymbol{v} = (1,2,2)。$$

我們用放在圓括弧裡的形式來寫向量, 是爲了節省空間。但是 $\boldsymbol{v} = (1,2,2)$ 並不是一個列向量! 它其實是一個行向量, 只是暫時擺平了。它與列向量 $[1\ \ 2\ \ 2]$ 是完全不同的。雖然它們的三個分量都一樣, 但是 $[1\ \ 2\ \ 2]$ 是向量 $\boldsymbol{v}$ 的 "轉置" 。

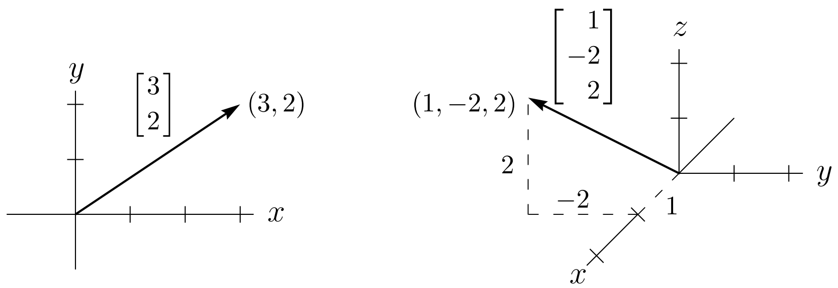


圖 1.3: 向量 $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$ 與 $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}$ 對應於點 (x,y) 與 (x,y,z)。

在三維空間裡, 加法 $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ 還是得一個分量一個分量來作。和向量的分量分別是 $v_1 + w_1$, $v_2 + w_2$, $v_3 + w_3$。從這裡你可以看出來如何在 4 維、5 維、甚至 n 維空間裡作向量的加法了。當 $\boldsymbol{w}$ 的箭尾放在 $\boldsymbol{v}$ 的箭尖時, 第三邊正好是 $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$。另外一種走過平行四邊形的方式是 $\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}$ 。問題: 平行四邊形的四邊都落在同一個平面上嗎? 是的。向量 $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} - \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$ 整個繞一圈產生向量 ____ 。

三維空間裡三個向量的線性組合一般就像是這個樣子 $\boldsymbol{u} + 4\boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{w}$:

$$\textbf{線性組合} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}。$$

重要的問題

如果只有一個向量 $\boldsymbol{u}$, 則所有的線性組合就只是常數倍 $c\boldsymbol{u}$。對於兩個向量而言, 線性組合就是 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}$ 。對於三個向量而言, 線性組合就是 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{w}$。你願意跨越一大步 從一個線性組合走到所有的線性組合嗎? 所有可能的 c, d, e 都可以拿來用。假設向量 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 是三維空間裡的向量:

1. 所有線性組合 $c\boldsymbol{u}$ 構成的圖像是什麼樣子?
2. 所有線性組合 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}$ 構成的圖像是什麼樣子?
3. 所有線性組合 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{w}$ 構成的圖像是什麼樣子?

這些問題的答案會跟個別的向量 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 有關。假如它們都是零向量 (這是非常極端的情形), 則每個線性組合都是零。假如它們是一般性的非零向量 (分量是隨機地選出來的), 則有三種答案。以下是我們討論課題的關鍵概念:

1. 線性組合 $c\boldsymbol{u}$ 填滿一條**直線**。
2. 線性組合 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}$ 填滿一個**平面**。
3. 線性組合 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{w}$ 填滿一個**三維空間**。

直線是無窮長, 方向則是與 $\boldsymbol{u}$ 相同 (向前、向後、以及穿過零向量)。我特別希望你想一下 (由兩條直線組成的) 平面 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}$ 是什麼樣子。

把一條直線上所有的 $c\boldsymbol{u}$ 加到另一條直線上的 $d\boldsymbol{v}$ 就會填滿圖 1.4 裡的平面。

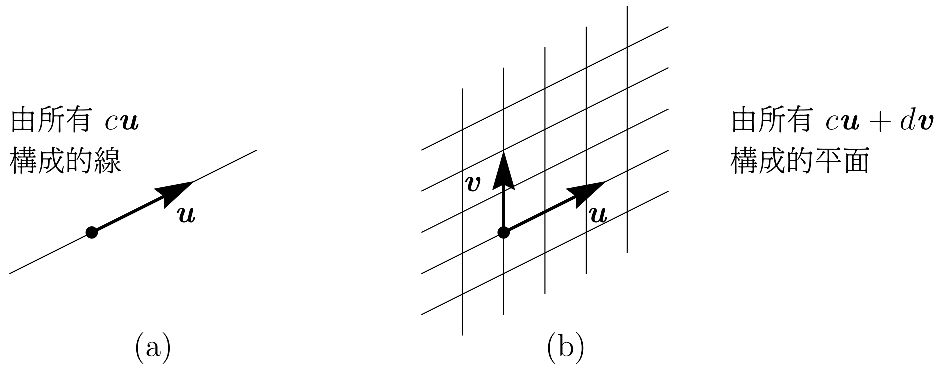


圖 1.4: (a) 通過 $\boldsymbol{u}$ 的直線。(b) 包含通過 $\boldsymbol{u}$ 與 $\boldsymbol{v}$ 兩條直線的平面。

當我們引進來第三個向量 $\boldsymbol{w}$, 那些常數倍向量 $e\boldsymbol{w}$ 就給出了第三條直線。假設那條直線不在 $\boldsymbol{u}$ 與 $\boldsymbol{v}$ 決定的平面上, 那麼把 $e\boldsymbol{w}$ 與所有 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}$ 組合起來, 就會填滿整個三維空間。

這是最具代表性的一般狀況! 先是直線, 然後是平面, 然後是空間。但是別的可能性也是會存在的。當 $\boldsymbol{w}$ 剛好是 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}$ 的時候, 則第三個向量會落在頭兩個向量決定的平面上。於是 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$

的線性組合不會走出 $\boldsymbol{uv}$ 平面。我們就得不到整個三維空間了。請想想看問題 1 裡的那些特殊情況。

▪ 關鍵概念複習 ▪

1. 二維空間的向量 $\boldsymbol{v}$ 有兩個分量 v_1 與 v_2。

2. 計算 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=(v_1+w_1,\, v_2+w_2)$ 與 $c\boldsymbol{v}=(cv_1, cv_2)$ 時, 是一個分量一個分量地來算。

3. 三個向量 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ 的線性組合是 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{w}$。

4. 在三維空間裡, $\boldsymbol{u}$ 的線性組合, 或者 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 的線性組合, 或者 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ 的線性組合通常會填滿一條直線、一個平面、或者整個空間。

▪ 有解例題 ▪

1.1 A 描述 $\boldsymbol{v}=(1,1,0)$ 與 $\boldsymbol{w}=(0,1,1)$ 所有的線性組合。找一個不是 $\boldsymbol{v}$ 與 $\boldsymbol{w}$ 的線性組合的向量。

解答 這兩個向量是三維空間 $\mathbf{R}^3$ 裡的向量, 它們的線性組合 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$ 會填滿 $\mathbf{R}^3$ 裡一個平面。在那個平面上的向量允許有各種 c 與 d 的值:

$$c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}=c\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\c+d\\d\end{bmatrix}。$$

譬如: $(0,0,0)$, $(2,3,1)$, $(5,7,2)$, $(\sqrt{2},0,-\sqrt{2})$ 都是在那個平面上的向量。第二分量總是第一與第三分量的和。向量 $(1,1,1)$ 就不在那個平面上。

另外一種描述這個通過 $(0,0,0)$ 的平面的方法, 是找到一個垂直於此平面的向量。本例裡 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$ 是一個垂直的向量。第 1.2 節會介紹向量的點積, 那時我們就可以用 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 與 $\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 來驗證向量是否垂直於平面。

1.1 B 已知 $\boldsymbol{v}=(1,0)$ 與 $\boldsymbol{w}=(0,1)$。(**1**) 當 c 是整數時, 以及 (**2**) 當 $c\geq 0$ 是非負數時, 分別描述所有的點 $c\boldsymbol{v}$, 以及所有的線性組合 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$ (其中 d 可以是任意數) 。

解答

(**1**) 當 c 爲整數時, 向量 $c\boldsymbol{v}=(c,0)$ 是 x 軸 (就是 $\boldsymbol{v}$ 的方向) 上等距離分佈的點, 像是 $(-2,0),(-1,0),(0,0),(1,0),(2,0)$。加上所有的向量 $d\boldsymbol{w}=(0,d)$, 就是在那些點上放上一整條 y 方向的直線。我們得到無窮條平行線 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}=$ (整數, 任意數)。這些是在 xy 平面上的垂直線, 它們通過 x 軸上等距離分佈的點。

(2) 當 $c \geq 0$ 時, 向量 $c\boldsymbol{v}$ 填滿一條“半直線”。那條半直線是正 x 軸, 它的起點是當 $c = 0$ 時的點 $(0,0)$。半直線包含了點 $(\pi, 0)$, 但不包含點 $(-\pi, 0)$。加上所有的向量 $d\boldsymbol{w}$ 就是在半直線的每個點上放上一整條 y 方向的直線。我們因而得到一個半平面。那是當 $x \geq 0$ 時 xy 平面的右半平面。

習題 1.1

問題 1–9 **是關於向量的加法與線性組合。**

1 利用幾何的方式 (像是一條直線、一個平面 $\cdots$) 描述下列向量的線性組合:

$$(a)\ \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} 與 \begin{bmatrix}4\\4\\4\end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} 與 \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \qquad (c)\ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} 與 \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} 與 \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}。$$

2 在同一個 xy 平面上, 畫出向量 $\boldsymbol{v} = \left[\begin{smallmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{1}\end{smallmatrix}\right]$ 與 $\boldsymbol{w} = \left[\begin{smallmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{2}\end{smallmatrix}\right]$ 以及 $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ 與 $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$。

3 假如 $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \left[\begin{smallmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{smallmatrix}\right]$ 並且 $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \left[\begin{smallmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{3}\end{smallmatrix}\right]$, 計算並畫出 $\boldsymbol{v}$ 與 $\boldsymbol{w}$。

4 從 $\boldsymbol{v} = \left[\begin{smallmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{1}\end{smallmatrix}\right]$ 與 $\boldsymbol{w} = \left[\begin{smallmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\end{smallmatrix}\right]$, 分別找出 $3\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v} - 3\boldsymbol{w}$, $c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w}$ 的分量。

5 對於以下的向量

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}-3\\1\\-2\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix}2\\-3\\-1\end{bmatrix},$$

算出 $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, $2\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$。

6 每一個 $\boldsymbol{v} = (1, -2, 1)$ 與 $\boldsymbol{w} = (0, 1, -1)$ 的線性組合的分量總和爲 ____。尋找 c 與 d 使得 $c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w} = (4, 2, -6)$。

7 在 xy 平面上畫出以下九種線性組合:

$$c\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \quad 其中 \quad c = 0, 1, 2 \quad 而 \quad d = 0, 1, 2。$$

8 圖 1.1 裡的平行四邊形的對角線是 $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$。另外一條對角線是什麼? 兩條對角線的和是什麼? 把向量和畫出來。

9 假如平行四邊形有三個頂點是 $(1, 1)$, $(4, 2)$, $(1, 3)$, 哪些點有可能成爲第四個頂點呢? 畫出兩個這樣的點來。

問題 10–14 **是有關於正立方體與時鐘上的特定向量。**

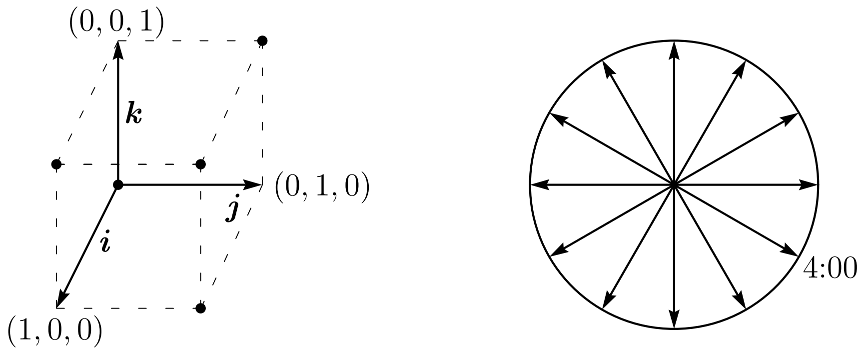


圖 1.5: 由 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 決定的單位立方體; 十二個小時的向量。

10 在正立方體裡畫出 $\boldsymbol{i} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{j} = (0,1,0)$, $\boldsymbol{k} = (0,0,1)$ 的向量和。$\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ 產生出 ____ 的對角線。

11 正立方體有四個頂點是 $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$。其他四個頂點是什麼? 找出正立方體的中心點的座標。六個面的中心點是 ____。

12 在四維空間裡正立方體有多少個頂點? 有多少個面? 一個具代表性的頂點是 $(0,0,1,0)$。

13 (a) 從時鐘中心到 1:00, 2:00, ..., 12:00 的向量加在一起得到的向量 $\boldsymbol{V}$ 是什麼?

(b) 假如把指向 4:00 的向量拿走, 剩下的十一個向量的和是什麼?

(c) 指向 1:00 的單位向量是什麼?

14 假設十二個向量不是從中心的 $(0,0)$ 出發, 而是從底端的 6:00 出發, 則指向 12:00 的向量就加倍為 $2\boldsymbol{j} = (0,2)$。現在求十二個新向量的和。

問題 15–19 **進一步探討 $\boldsymbol{v}$ 與 $\boldsymbol{w}$ 的線性組合** (**請看圖** 1.6)。

15 圖中顯示出 $\frac{1}{2}\boldsymbol{v}+\frac{1}{2}\boldsymbol{w}$ 。畫出以下諸點: $\frac{3}{4}\boldsymbol{v}+\frac{1}{4}\boldsymbol{w}$, $\frac{1}{4}\boldsymbol{v}+\frac{1}{4}\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$。

16 畫出點 $-\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{w}$ 以及任何一個滿足 $c+d=1$ 的線性組合 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$。畫出所有滿足 $c+d=1$ 的線性組合所構成的直線。

17 找出 $\frac{1}{3}\boldsymbol{v}+\frac{1}{3}\boldsymbol{w}$ 與 $\frac{2}{3}\boldsymbol{v}+\frac{2}{3}\boldsymbol{w}$。線性組合 $c\boldsymbol{v}+c\boldsymbol{w}$ 填滿哪一條直線? 在 $c \geq 0$ 的限制條件下, 滿足 $c=d$ 的線性組合填滿哪一條半直線?

18 在 $0 \leq c \leq 1$ 與 $0 \leq d \leq 1$ 的限制條件下, 用陰影畫出所有線性組合 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$ 所佔據的領域。

19 只限制 $c \geq 0$ 與 $d \geq 0$, 畫出所有線性組合 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$ 的 “角錐” 。

問題 20–27 **涉及三維空間的向量 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$** (**請看圖** 1.6)。

20 在虛線三角形內找出 $\frac{1}{3}\boldsymbol{u}+\frac{1}{3}\boldsymbol{v}+\frac{1}{3}\boldsymbol{w}$ 與 $\frac{1}{2}\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\boldsymbol{w}$。有挑戰性的問題: 在 c, d, e 上加什麼限制條件, 可以使線性組合 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{w}$ 填滿整個虛線三角形?

21 虛線三角形的三邊分別是 $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}$, 它們的和是 ____。利用環繞三角形箭頭接箭尾的加法方式, 畫出 $(3,1)$ 加 $(-1,1)$ 加 $(-2,-2)$。

22 利用陰影畫出滿足 $c\geq 0$, $d\geq 0$, $e\geq 0$ 與 $c+d+e\leq 1$ 所有線性組合 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{w}$ 的金字塔。畫出向量 $\frac{1}{2}\big(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\big)$, 看它是在金字塔內部還是外部。

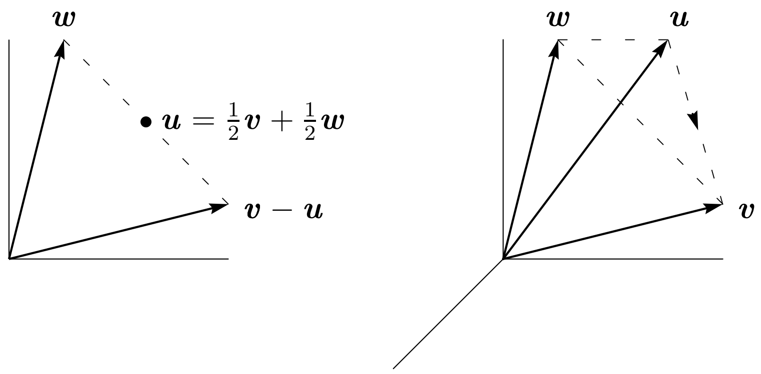


圖 1.6: 在平面上的問題 **15–19** 在三維空間裡的問題 **20–27**

23 假如你觀察所有由 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 構成的線性組合之後, 是否能判定有沒有不能用 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{w}$ 表示的向量?

24 哪些向量既是 $\boldsymbol{u}$ 與 $\boldsymbol{v}$ 的線性組合, 又是 $\boldsymbol{v}$ 與 $\boldsymbol{w}$ 的線性組合?

25 畫出向量 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ 來, 使得它們的線性組合 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{w}$ 填滿一條直線。畫出向量 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ 來, 使得它們的線性組合 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{w}$ 填滿一個平面。

26 向量 $\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\end{bmatrix}$ 與 $\begin{bmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{bmatrix}$ 的什麼樣線性組合會產生 $\begin{bmatrix}\mathbf{14}\\\mathbf{8}\end{bmatrix}$? 把這個問題表示成線性組合裡的係數 c 與 d 的方程式。

27 *複習題*: 在 xyz 空間裡, 由 $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$ 與 $\boldsymbol{j}=(0,1,0)$ 所有線性組合構成的平面在哪裡?

28 假如 (a,b) 是 (c,d) 的純量倍數, 而且 $abcd\neq 0$, 證明 (a,c) 是 (b,d) 的純量倍數。這個現象是出乎意料外的重要, 你可以把它當做是一個有挑戰性的問題。你不妨先用數字來看看 a, b, c, d 是如何關連起來的。問題本身會導向下面的事實:

> 假如 $A=\left[\begin{smallmatrix}\mathbf{a}&\mathbf{b}\\\mathbf{c}&\mathbf{d}\end{smallmatrix}\right]$ 的各行線性相關, 則它的各列也是線性相關。
>
> 最終導致: 假如 $AB=\left[\begin{smallmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{smallmatrix}\right]$, 則 $BA=\left[\begin{smallmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{smallmatrix}\right]$。這看起來好像很簡單 . . .